Symulacja w Badaniach i Rozwoju
Vol. 4, No. 4/2013

Sebastian KORCZAK
Politechnika Warszawska, ul. Narbutta 84, 02-524 Warszawa
E-mail: sebastian.korczak@simr.pw.edu.pl

Zadanie śledzenia ścieżki dla pojazdu niedosterowanego

1 Wstęp

Układem niedosterowanym nazywamy układ o większej liczbie stopni swobody niż zadanych sygnałów sterujących. Modele takich układów stosowane są często dla statków, rakiet, samolotów, poduszkowców, jak również w mechanice sportu [1, 4, 7]. Rozważając proces sterowania obiektem niedosterowanym, niezbędne jest określenie jego sterowalności wymagające specyficznego aparatu matematycznego [2, 4]. W niniejszej pracy przedstawiono najprostszy model obiektu niedosterowanego inspirowany pojazdem z kołami trolejowymi używanym w nauce bezpiecznej jazdy. Zaproponowano zastosowanie algorytmu obliczanego momentu [8] z modyfikacjami wymuszonymi przez występującą siłę sprzęgającą. Do sterowania układów niedosterowanych używa się również pasywnej metody pól prędkości [6] oraz metody *backstepping* [7].

2 Badany model

Rozważmy ciało sztywne w ruchu płaskim (rys. 1), o masie m i momencie bezwładności wokół środka masy równym I_c. Położenie środka masy określają współrzędne x i y w globalnym układzie współrzędnych O_{xy}. Przez φ oznaczono kąt obrotu ciała przeciwnie do ruchu wskazówek zegara względem osi X. Na bryłę działa siła reprezentowana przez wektor przyłożony w punkcie odległym od środka masy w odległość a (na osi symetrii podłużnej bryły). Kąt β określa kierunek działania siły F względem osi symetrii bryły. Założono jednocześnie, że na bryłę działają siły oporu ruchu proporcjonalne liniowo do prędkości. Równania ruchu ciała są następujące

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) = \left|\vec{F}(t)\right|\cos\left(\varphi(t) + \beta(t)\right)\ ; \tag{1}$$

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) = \left|\vec{F}(t)\right|\sin\left(\varphi(t) + \beta(t)\right)\ ; \tag{2}$$

$$I_C\ddot{\varphi}(t) + c_\varphi\dot{\varphi}(t) = a\left|\vec{F}(t)\right|\sin\beta(t)\ , \tag{3}$$

a warunki początkowe
$x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_{x0}, y(0) = y_0, \dot{y}(0) = v_{y0}, \varphi(0) = \varphi_0, \dot{\varphi}(0) = \omega_0$.
Zauważyć można, iż siła działająca na ciało powoduje sprzężenie ruchu postępowego i obrotowego. Wprowadźmy wektor stanu układu:

$$q = [x(t), y(t), \varphi(t), v_1(t), v_2(t), \omega(t)]\ , \tag{4}$$

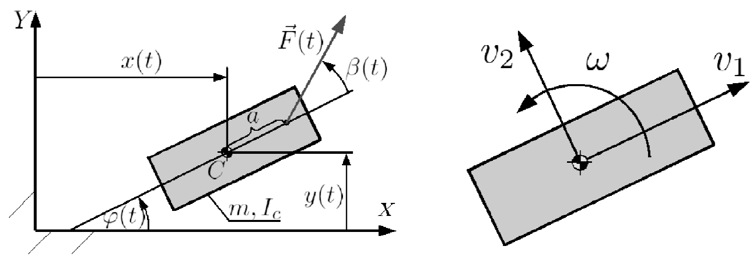
gdzie v_1 i v_2 są prędkościami ciała w lokalnym układzie współrzędnych, a ω jest prędkością kątową. Zapiszmy równania ruchu (1-3) w postaci macierzowej układu równań różniczkowych rzędu pierwszego:

$$\dot{q}(t) = f(q) + g_1 u_1(t) + g_2 u_2(t)\ , \tag{5}$$

gdzie wektor *f* postaci

$$f(q) = \begin{bmatrix} v_1 cos\varphi - v_2 sin\varphi \\ v_1 sin\ \varphi - v_2 sin\varphi \\ \omega \\ -\frac{c}{m} v_1 + v_2 \omega \\ -\frac{c}{m} v_2 + v_1 \omega \\ -\frac{c_\varphi}{I_C} \omega \end{bmatrix} \tag{6}$$

nazywany jest funkcją dryfu.



Rys. 1. Model układu niedosterowanego - bryła sterowana siłą niecentralną Globalny układ współrzędnych położenia i lokalne współrzędne prędkości

Fig. 1. Object in the global coordinate system and its velocities in the local coordinate system

Wektory sterujące u_1 i u_2 są składowymi:

$$u_1(t) = F(t)\cos\beta(t)\ , \tag{7}$$

$$u_2(t) = F(t)\sin\beta(t)\ , \tag{8}$$

tymczasem g_1 i g_2 wektorami stałymi:

$$g_1 = \left[0, 0, 0, \frac{1}{m}, 0, 0\right], \tag{9}$$

$$g_2 = \left[0, 0, 0, 0, \frac{1}{m}, \frac{a}{I_C}\right]. \tag{10}$$

Wektor u_1 wpływa jedynie na ruch ciała wzdłuż osi symetrii (prędkość v_1), a wektor u_2 wywołuje zmianę prędkości bocznej v_2 i obrotowej ω.

3 Sterowalność

Przed zaproponowaniem algorytmu sterowania niezbędne jest określenie sterowalności obiektu [3]. W praktyce, dla przedstawionego układu, sprowadza się to do zbudowania macierzy złożonej z wektorów zawartych w równaniu ruchu (5) oraz kombinacji tych wektorów będących niezerowymi nawiasami Liego [5]:

$$C = \left[f|g_1|g_2|[f,g_1]|[f,g_2]|\left[g_1,[f,g_2]\right]\right] . \tag{11}$$

Układ nazywamy sterowalnym lokalnie w krótkim czasie (STLC), gdy posiada niezerową funkcję dryfu i jednocześnie rząd macierzy *C* równy jest liczbie zmiennych stanu układu. Warunki te spełnia zaprezentowany układ (*rank*(*C*)=*dim*(*q*)=6 dla $\omega \neq am/Ic*v_2$).

Nawias Liego dwóch wektorów *f*(*x*) oraz *g*(*x*) generuje trzeci wektor:

$$[f,g] = \frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g , \tag{12}$$

gdzie:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix} . \tag{13}$$

4 Zadanie śledzenia ścieżki

Udowodniona lokalna sterowalność układu pozwala wyznaczyć zadanie śledzenia ścieżki przez obiekt sterowany. Opiszmy dynamikę układu w postaci macierzowej różniczkowych równań ruchu drugiego rzędu

$$M\ddot{z} + N(\dot{z}) = Q(t) , \tag{14}$$

gdzie

$$z = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ \varphi(t) \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I_C \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} c\dot{x}(t) \\ c\dot{y}(t) \\ c_\varphi \dot{\varphi}(t) \end{bmatrix}, Q(t) = \begin{bmatrix} F\cos(\varphi(t) + \beta(t)) \\ F\sin(\varphi(t) + \beta)(t) \\ aF \sin\beta\,(t) \end{bmatrix}.$$

Zaproponujmy zastosowanie algorytmu obliczanego momentu (*computed torque technique*) do sterowania obiektem przy jednoczesnym użyciu sprzężenia zwrotnego z regulacją typu proporcjonalno-różniczkującego. Niezbędne do sterowania obiektem sygnały sterujące określa zależność:

$$\tau(t) = M\ddot{z}_d + N(\dot{z}) + K_v(\dot{z}_d - \dot{z}) + K_p(z_d - z) , \tag{15}$$

gdzie $z_d(t)$ oznacza pożądaną trajektorię ruchu. Rysunek 2 przedstawia schematycznie funkcjonowanie algorytmu w układzie.

Porównanie zależności (14) i (15) z użyciem zmiennej błędu sterowania $e(t)=z_d(t)-z(t)$ prowadzi do równania dynamiki błędu:

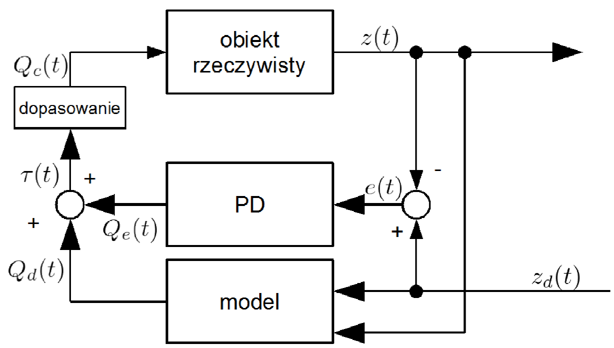
$$M\ddot{e}(t) + K_v\dot{e}(t) + K_p e(t) = 0 , \tag{16}$$

które dowodzi zbieżności błędów do zera dla dodatnio określonych macierzy parametrów układu M, K_v i K_p.

Zaproponujmy zadanie śledzenia trajektorii kołowej z zachowaniem styczności osi symetrii ciała do trajektorii

$$z_d(t) = \begin{bmatrix} R\cos\theta t \\ R\sin\theta t \\ \theta t + \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}, \tag{17}$$

gdzie R jest promieniem trajektorii a θ oznacza prędkość kątową.



Rys. 2. Schemat blokowy układu sterowania obiektem niedosterowanym

Fig. 2. A block diagram of an underactuated system control process.

W sytuacji tej problemem okazuje się dostosowanie obliczonych sił sterujących (15) do realnych możliwości układu opisanych przez wektor $Q(t)$ równania ruchu (14). Pominięcie sterowania kątem obrotu pozwala rozwiązać powyższy problem, co prowadzi do zależności uzupełniających algorytm:

$$F = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2}, \tag{18}$$

$$\beta = \arctan\left({}^{\tau_y}/_{\tau_x}\right) - \varphi . \tag{19}$$

5 Symulacja numeryczna

Prześledźmy zachowanie układu podczas przedstawionego procesu sterowania dla przykładowych parametrów (tab. 1). Zgodnie z oczekiwaniami układ śledzi zadaną trajektorię z błędem położenia zbieżnym do zera w czasie, przy jednoczesnym ustabilizowaniu się błędu kąta obrotu (rys. 3).

Tab. 1. Parametry układu podczas symulacji numerycznej
Tab. 1. System and control parameters for numerical simulation

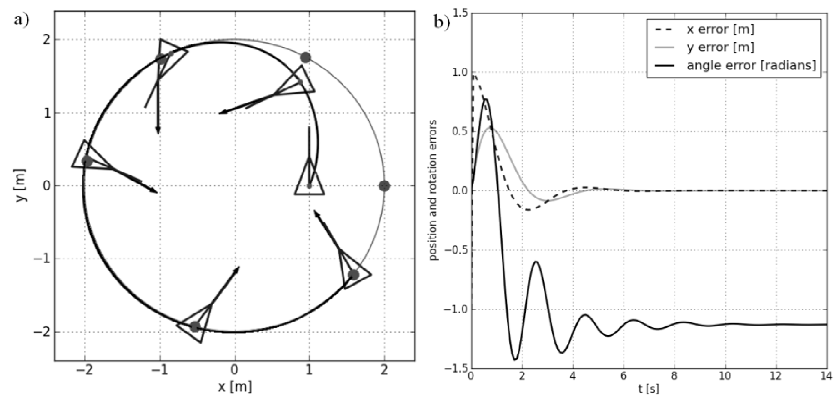
	oznaczenie	wartość
Parametry układu	m	$2kg$
	I_C	$0{,}1\ kgm^2$
	a	$0{,}4m$
	c	$0{,}6\frac{Ns}{m}$
	c_φ	$0{,}1Nsm$
Warunki początkowe	$x(0), y(0), \varphi(0)$	$1m, 0m, \frac{\pi}{2}$
	$\dot{x}(0), \dot{y}(0), \dot{\varphi}(0)$	$0\frac{m}{s}, 0\frac{m}{s}, 0\frac{1}{s}$
Parametry regulatora	K_p	$diag\left(5{,}2\ \frac{N}{m}\right)$
	K_v	$diag\left(\sqrt{10{,}4}\frac{Ns}{m}\right)$
Parametry trajektorii	R	$2m$
	θ	$\frac{\pi}{4}$

Pominięcie sterowania obrotem wymagać może analizy stateczności ruchu, co jeszcze lepiej widoczne jest podczas śledzenia trajektorii ósemkowej opisanej przez:

$$z_d(t) = \begin{bmatrix} 0{,}5\,R\cos 2\theta t \\ R\sin\theta t \end{bmatrix}. \tag{20}$$

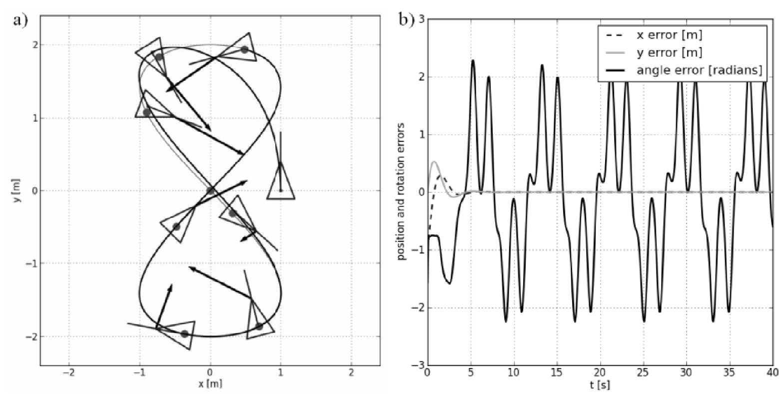
Rysunek 4 prezentuje wyniki symulacji – zaobserwować możemy okresowe, dość silne zmiany błędu kąta obrotu.

W zastosowaniach praktycznych siła sterująca posiada ograniczenia wartości maksymalnej i kąta skierowania – przykład zachowania takiego układu przedstawia rysunek 5. Symulacja ukazuje, że ograniczenie siły maksymalnej prowadzi do okresowych przebiegów błędu położenia, a ograniczenie kąta działania siły sterującej skutkować może quasi-okresowymi bądź chaotycznymi zachowaniami układu.



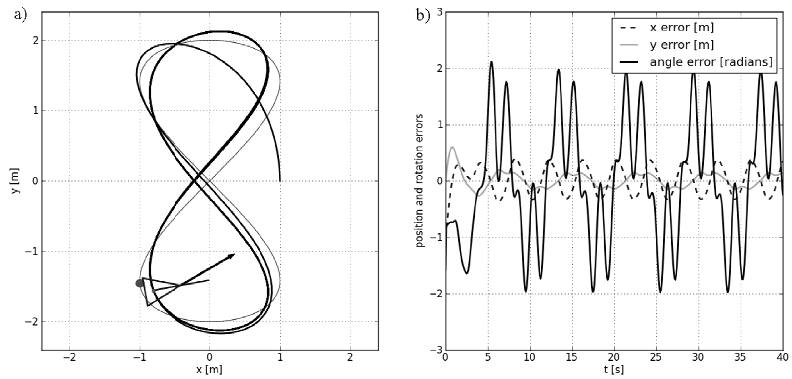
Rys. 3. Przykładowy wynik symulacji numerycznej: a) trajektoria zadana i osiągnięta wraz z kilkoma pozycjami obiektu sterowanego, b) zmiana błędów położenia i obrotu obiektu w funkcji czasu

Fig. 3. Numerical simulation of circle tracking: a) achieved trajectory of the object with exemplary orientations and force directions, b) evolution of position and rotation



Rys. 4. Przykładowy wynik symulacji numerycznej śledzenia ścieżki ósemkowej: a) trajektoria zadana i osiągnięta wraz z kilkoma pozycjami obiektu sterowanego; b) zmiana błędów położenia i obrotu obiektu w funkcji czasu

Fig. 4. Numerical simulation of eight-curve tracking: a) reference trajectory, achieved trajectory and some exemplary orientations of the object; b) evolution of position and rotation errors



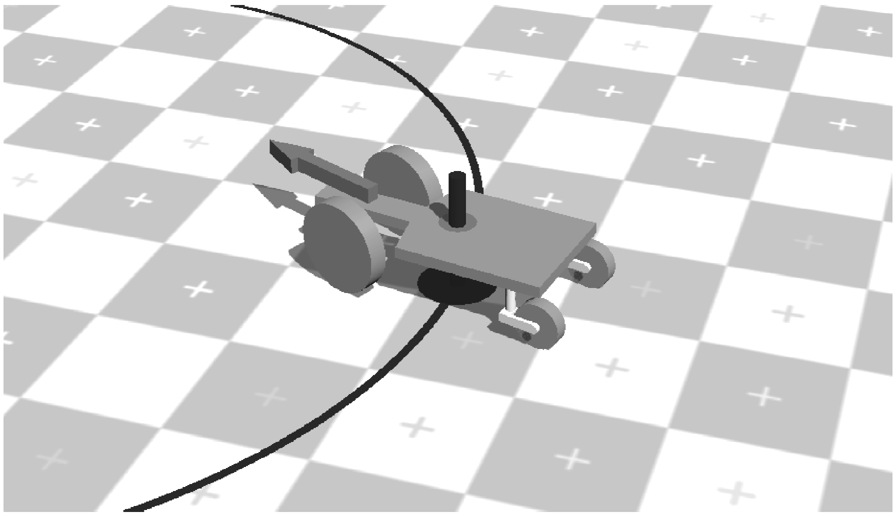
Rys. 5. Wynik symulacji numerycznej śledzenia trajektorii ósemkowej z ograniczeniem maksymalnej siły: a) trajektoria zadana i osiągnięta wraz z kilkoma pozycjami obiektu sterowanego, b) zmiana błędów położenia i obrotu obiektu w funkcji czasu

Fig. 5. Numerical simulation of eight curve tracking with the maximum force limitation: a) reference and achieved trajectory b) evolution of position and rotation errors

6 Wizualizacja w programie Blender

Proces symulacji numerycznej rozważanego zadania połączono z jednoczesną wizualizacją, stosując program Blender – darmowe otwarto-źródłowe środowisko dla grafików i twórców gier, pozwalające połączyć zaawansowaną grafikę trójwymiarową z dowolnie zaprogramowanymi procesami. Model układu wraz z algorytmami sterowania i rozwiązywania zapisany w języku programowania Python może zostać przeliczony, a wyniki przedstawione jako animacja. Atrakcyjna staje się możliwość jednoczesnej wizualizacji i przeliczania modelu, również w rzeczywistej skali czasu, z możliwością ingerencji w układ za pomocą sygnałów klawiatury i myszy. Rysunek 6 przedstawia trójwymiarowy obiekt pojazdu z wizualizacji.

Pliki wideo z symulacjami i wizualizacjami obejrzeć można pod adresem internetowym *http://myinventions.pl/underactuated*.



Rys. 6. Zrzut ekranu z symulacji w programie Blender
Fig. 6. Screenshot from simulation in Blender software

7 Podsumowanie

W artykule zaprezentowano prosty model układu niedosterowanego inspirowany pojazdem z kółkami trolejowymi. Po udowodnieniu sterowalności zaproponowano zadanie śledzenia ścieżek: okrężnej i ósemkowej. Do sterowania użyto algorytmu obliczanego momentu (ang. *computed torque*) wraz ze sprzężeniem zwrotnym typu proporcjonalno-różniczkującego. Siła sterująca powodująca sprzężenie stopni swobody ograniczyła możliwość realizacji zadania – niezbędna była rezygnacja ze sterowania jednej zmiennej stanu układu. Pokazano, że zachowanie układu może przybierać postać zarówno okresową, jak i quasi-okresową lub chaotyczną w przypadku ograniczeń nałożonych na siłę sterującą.

Literatura

1. Berkemeier M. D., Fearing R. S.: Tracking fast inverted trajectories of the underactuated Acrobot. IEEE *Transactions on Robotics and Automation*, vol. 15, no. 4, s. 740–750, 1999
2. Bullo F., Leonard N. E., and Lewis A. D.: Controllability and motion algorithms for underactuated Lagrangian systems on Lie groups. IEEE *Transactions on Automatic Control*, vol. 45, no. 8, s. 1437–1454, 2000
3. Hermann R., Krener A.: Nonlinear controllability and observability. IEEE *Transactions on Automatic Control*, vol. 22, no. 5, s. 728-740, 1977
4. Jin Z., Waydo S., Wildanger E. B., Lammers M., Scholze H., Foley P., Held D., Murray R. M.: MVWT-II: The second generation caltech multi-vehicle wireless testbed. *Proc. of the American Control Conference*, vol. 6, s. 5321–5326, 2004
5. Lewis A. D.: *A brief on controllability of nonlinear systems*. 2002

6. Narikiyo T., Sahashi J., Misao K.: Control of a class of underactuated mechanical systems. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, vol. 2, no. 2, s. 231-241, 2008
7. Repoulias, F. Papadopoulos E.: Planar trajectory planning and tracking control design for underactuated AUVs. *Ocean Engineering*, vol. 34, no. 11-12, s. 1650-1667, 2007
8. Zelei A., Kovács L. L., Stépán G.: Computed torque control of an under-actuated service robot platform modeled by natural coordinates. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 16, no. 5, s. 2205–2217, 2011

Streszczenie

Niniejszy artykuł przedstawia problem sterowania układami niedosterowanymi na przykładzie prostego modelu bryły sztywnej pod działaniem siły przyłożonej niecentralnie. Zaprezentowano metodę określania sterowalności układów niedosterowanych, a następnie zaproponowano zadanie śledzenia trajektorii kołowej i ósemkowej za pomocą algorytmu obliczanego momentu. Siła sterująca powodująca sprzężenie równań wymusza modyfikację algorytmu sterowania. Proces obliczeniowy uzupełniono o środowisko wizualizacji trójwymiarowych.

Słowa kluczowe: układy niedosterowane, śledzenie ścieżki, metoda obliczanego momentu

Tracking control of an underactuated vehicle

Summary

This paper shows a problem of control an underactuated dynamic system. The exemplary model of a rigid body controlled by an eccentric force is presented. Method for controlability check is shown, then the usage of a computed torque algorithm for the tracking problem of circular and eight-curve trajectories is proposed. The coupling force causes the need to modify the algorithm. The calculation process has been extended by a virtual environment for three-dimensional visualizations.

Keywords: underactuated systems, tracking, computed torque