Symulacja w Badaniach i Rozwoju
Vol. 4, No. 4/2013

Tomasz Janusz TELESZEWSKI
Politechnika Białostocka, WBiIŚ
ul.Wiejska 45E, 15-351 Białystok
E-mail: t.teleszewski@pb.edu.pl

Wyznaczenie nieustalonego przepływu laminarnego cieczy lepkiej w przewodach prostoosiowych o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego przy wykorzystaniu metody MEB

1 Wprowadzenie

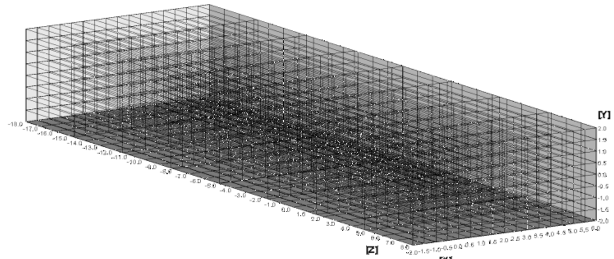
W pracy przedstawiono rozwiązanie niestacjonarnego laminarnego przepływu w przewodach prostoosiowych metodą elementów brzegowych (MEB).

Nieustalony przepływ laminarny (c_x=0, c_y=0) w przewodzie prostoliniowym opisany jest następującym równaniem różniczkowym [1]:

$$\mu\left(\frac{\partial^2 c_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 c_z}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial p}{\partial z}=\rho\,\frac{\partial c_z}{\partial t}\quad;\quad \nu=\frac{\mu}{\rho}\,, \tag{1}$$

gdzie: c_z oznacza prędkość przepływu, p jest to ciśnienie, t jest to czas, μ jest współczynnikiem lepkości dynamicznej, ν jest współczynnikiem lepkości kinematycznej, natomiast ρ jest gęstością płynu.

W klasycznych metodach obszarowych [2, 3, 4] stosuje się skomplikowane i pracochłonne siatki przestrzenne. Wyprowadzony w publikacji algorytm pozwala zastąpić skomplikowaną siatkę przestrzenną wewnątrz przewodu (rys. 1) brzegiem przekroju poprzecznego przewodu. Przedstawiony poniżej algorytm MEB przepływu cieczy lepkiej w przewodach prostoliniowych został zaimplementowany w autorskim programie obliczeniowym VISCOUS UNSTEADY FLOW DUCT w języku Fortran.



Rys. 1. Przykładowa przestrzenna siatka kanału prostokątnego stosowana w symulacji przepływu w przewodach prostoosiowych w metodach obszarowych

Fig. 1. Structured mesh for rectangular channel using in mesh method

Zagadnienie nieustalonego ruchu laminarnego cieczy lepkiej w najogólniejszym przypadku jest rozumiane jako zjawisko tzw. rozbiegu hydraulicznego, kiedy na ciecz wypełniającą przewód pozostającą w bezruchu działa od pewnej chwili wymuszenie hydrauliczne w postaci stałej różnicy ciśnienia wzdłuż osi przewodu lub w przypadku, kiedy w pewnej chwili rozpoczyna się ruch przewodu ze stałą prędkością w stosunku do cieczy wypełniającej przewód.

2 Brzegowe równanie całkowe opisujące nieustalony laminarny przepływ cieczy lepkiej

Równanie (1) rozwiązuje się analogicznie do równania Fouriera w teorii przewodnictwa cieplnego. [5]. Zakładając warunek zerowej prędkości na brzegu L, gradient ciśnienia w przekroju kanału Λ oraz przedział czasu $[t^0;t^K]$, rozwiązaniem różniczkowanego równania (1) jest następujące równanie całkowe:

$$\begin{aligned}
&\chi(\mathbf{p})c_z(\mathbf{p},t)+\frac{1}{\rho}\int_{t_0}^{t}\int_{(L_f)} g_z(\mathbf{q},t)N(\mathbf{p},\mathbf{q},t^K,t)\,dL_{fq}\,dt = \\
&\frac{1}{\rho}\int_{t_0}^{t_K}\int_{(L_g)} c_z(\mathbf{q},t)F(\mathbf{p},\mathbf{q},t^K,t)\,dL_{gq}\,dt + \\
&\iint_{\Lambda} c_z(\mathbf{q},t^0)N(\mathbf{p},\mathbf{v},t^K,t^0)\,dL_{gq}\,d\Lambda + \\
&\frac{1}{\rho}\int_{t_0}^{t_K}\iint_{(\Lambda)} \frac{dp}{dz}(\mathbf{v},t)N(\mathbf{p},\mathbf{v},t^K,t)\,d\Lambda\,dt \\
&(\mathbf{p}),(\mathbf{q})\in L\,;\,(\mathbf{v})\in\Lambda
\end{aligned} \tag{2}$$

gdzie:

$$N(\mathbf{p},\mathbf{q},t^K,t)=\frac{1}{4\pi\nu\left(t^K-t\right)}\exp\left(\frac{-(r_{\mathbf{pq}})^2}{4\nu\left(t^K-t\right)}\right) \qquad r_{\mathbf{pq}}=\left|\mathbf{p}-\mathbf{q}\right| \tag{2a}$$

$$\begin{aligned}
&F(\mathbf{p},\mathbf{q},t^K,t)=\frac{\mu((x_{\mathbf{p}}-x_{\mathbf{q}})n_x+(y_{\mathbf{p}}-y_{\mathbf{q}})n_y)}{8\pi\nu^2\left(t^K-t\right)}\exp\left(\frac{-(r_{\mathbf{pq}})^2}{4\nu\left(t^K-t\right)}\right) \\
&r_{\mathbf{pq}}=\left|\mathbf{p}-\mathbf{q}\right| \\
&\left[n_x,n_y\right]=\left[\frac{\delta y_{\mathbf{q}}}{\delta L_{\mathbf{q}}},-\frac{\delta x_{\mathbf{q}}}{\delta L_{\mathbf{q}}}\right]
\end{aligned} \tag{2b}$$

$$N(\mathbf{p},\mathbf{v},t^K,t^0)=\frac{1}{4\pi\nu\left(t^K-t^0\right)}\exp\left(\frac{-(r_{\mathbf{pv}})^2}{4\nu\left(t^K-t^0\right)}\right) \tag{2c}$$

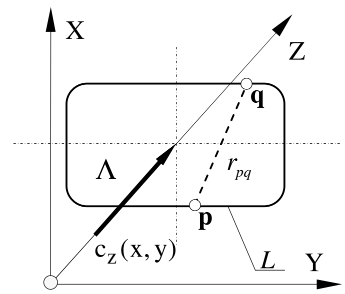
$$r_{\mathbf{pv}}=\left|\mathbf{p}-\mathbf{v}\right|$$

$$N(\mathbf{p},\mathbf{v},t^K,t)=\frac{1}{4\pi\nu\left(t^K-t\right)}\exp\left(\frac{-(r_{\mathbf{pv}})^2}{4\nu\left(t^K-t\right)}\right) \tag{2d}$$

$$r_{\mathbf{pv}}=\left|\mathbf{p}-\mathbf{v}\right|$$

gdzie: n_x oraz n_y są to wersory normalnej do brzegu (L).

Współczynnik $\chi(\mathbf{p})$ związany jest z położeniem rozpatrywanego punktu brzegowego, w przypadku gładkiego fragmentu brzegu $\chi(\mathbf{p})=0.5$, natomiast gdy $(\mathbf{p})\in\Lambda$: $\chi(\mathbf{p})=1.0$.



Rys. 2. Szkic do analizy zagadnienia brzegowego w przekroju przewodu prostoliniowego

Fig. 2. Sketch to consideration of boundary conditions in cross-section of duct

Po wyznaczeniu gęstości $g_z(\mathbf{q},t)$ na linii brzegowej (L), prędkość $c_z(\mathbf{p},t)$ w dowolnym punkcie obszaru (Λ) wyznacza się z zależności:

$$\begin{aligned} c_z(\mathbf{p},t) &= \frac{1}{\rho}\int_{t_0}^{t_K}\int_{(L_g)} c_z(\mathbf{q},t)F(\mathbf{p},\mathbf{q},t^K,t)dL_{gq}dt- \\ &\frac{1}{\rho}\int_{t_0}^{t}\int_{(L_f)} g_z(\mathbf{q},t)N(\mathbf{p},\mathbf{q},t^K,t)dL_{fq}dt+ \\ &\iint_{\Lambda} c_z(\mathbf{q},t^0)N(\mathbf{p},\mathbf{v},t^K,t^0)dL_{gq}d\Lambda+ \\ &\frac{1}{\rho}\int_{t_0}^{t}\iint_{(\Lambda)}\frac{dp}{dz}(\mathbf{v},t)N(\mathbf{p},\mathbf{v},t^K,t)d\Lambda dt \\ &(\mathbf{p}),(\mathbf{v})\in\Lambda,\ (\mathbf{q})\in L \end{aligned} \tag{3}$$

3 Weryfikacja numerycznego modelu

W celu wykonania weryfikacji przedstawionego algorytmu porównano rozwiązania numeryczne MEB dla przepływu płynu o jednostkowym promieniu R i jednostkowej lepkości przez przewód kołowy ze znanym rozwiązaniem teoretycznym [6], [7]:

$$\frac{c}{c_{\max}}(r)=\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8J_0\left(\lambda_n\frac{r}{R}\right)}{\lambda_n^3 J_1(\lambda_n)}\exp\left(-\lambda_n^3\frac{\nu t}{R^2}\right)\quad ;c_{\max}=\frac{R^2}{8\mu}\frac{dp}{dz}\quad , \tag{4}$$

gdzie: c_{max} jest to maksymalna prędkość w przewodzie kołowym, J_0 są to funkcje Bessela pierwszego rodzaju, natomiast λ_n są to miejsca zerowe funkcji Bessela.

Zgodność równania teoretycznego (4) z eksperymentem została potwierdzona w [8].

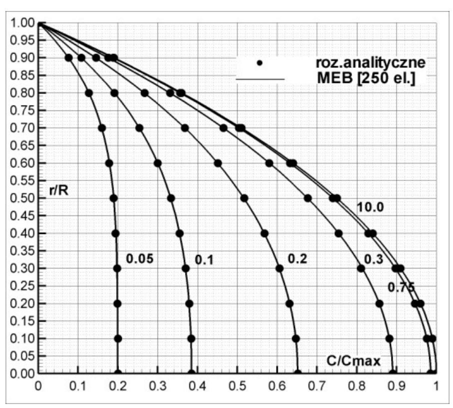
Błąd rozwiązania metody elementów brzegowych wyznaczono z zależności:

$$\delta c_{\mathrm{MEB}}=\left|\frac{c_{\mathrm{TEO}}/c_{\max\,\mathrm{TEO}}-c_{\mathrm{MEB}}/c_{\max\,\mathrm{MEB}}}{c_{\mathrm{TEO}}/c_{\max\,\mathrm{TEO}}}\right|*100\%\ , \tag{5}$$

gdzie: c_{MEB} jest to prędkość wyznaczona metodą elementów brzegowych, natomiast c_{TEO} jest rozwiązaniem teoretycznym (4) [6, 7].

W tabeli 1 zestawiono błąd metody MEB dla brzegu składającego się z 50 i 250 liniowych elementów po czasie t=0.40[s]. Wzrost dyskretyzacji brzegu powoduje zmniejszenie błędu metody elementów brzegowych.

Graficzne rezultaty porównania wyników obliczeń metody elementów brzegowych z rozwiązaniem teoretycznym (4) po czasie t=0.05; 0.1; 0.2; 0.3;, 0.75; 10.0 [s] zostały przedstawione na rysunku 3.



Rys. 3. Porównanie rezultatów obliczeń MEB z rozwiązaniem teoretycznym (4) [6, 7]

Fig. 3. Comparison of BEM results with theoretical solution (4) [6, 7]

Tab. 1. Rozbieg hydrauliczny płynu lepkiego w przewodzie okrągłym (t=0.40[s]) - błąd rozwiązania MEB

Tab. 1. Instantaneous velocity profiles for starting flow in a pipe witch circular cross section (t=0.40[s]) - error analysis applied in BEM

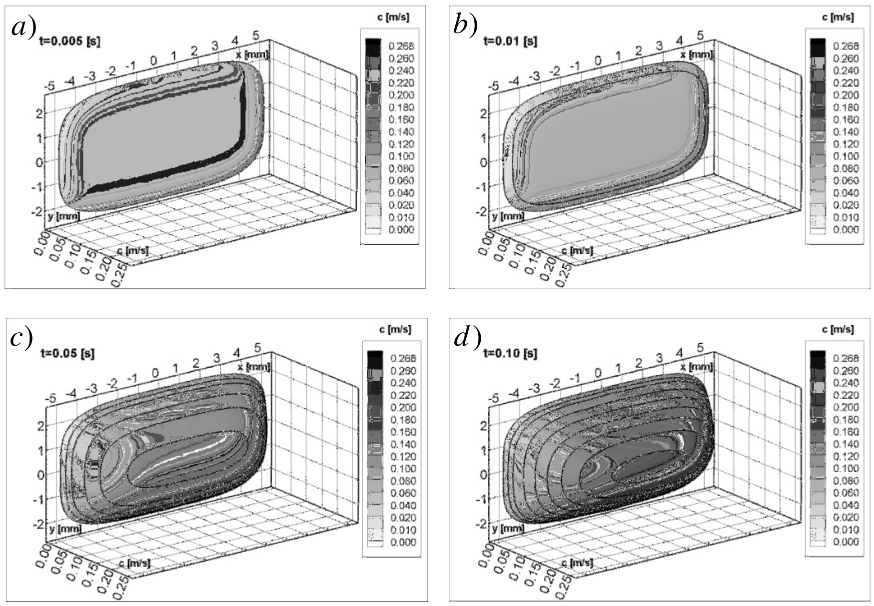
Lp.	Współrz. węzłów	Roz. teoretyczne	Roz. num. MEB 50el.	Błąd met. MEB 50 el.	Roz. num. MEB 250el.	Błąd met. MEB 250 el.
-	r [m]	$c_{TEO}/c_{MAX\ TEO}$ [-]	$c_{MEB}/c_{MAX\ MEB}$ [-]	δc_{MEB} [%]	$c_{MEB}/c_{MAX\ MEB}$ [-]	δc_{MEB} [%]
1	0,0E+00	8,9037E-01	9,0948E-01	2,1464E+00	8,9920E-01	9,9185E-01
2	1,0E-03	8,8195E-01	9,0076E-01	2,1330E+00	8,9040E-01	9,5832E-01
3	2,0E-03	8,5662E-01	8,7452E-01	2,0899E+00	8,6400E-01	8,6180E-01
4	3,0E-03	8,1418E-01	8,3068E-01	2,0271E+00	8,1996E-01	7,1038E-01
5	4,0E-03	7,5430E-01	7,6920E-01	1,9755E+00	7,5812E-01	5,0655E-01
6	5,0E-03	6,7655E-01	6,8992E-01	1,9757E+00	6,7840E-01	2,7292E-01
7	6,0E-03	5,8042E-01	5,9264E-01	2,1054E+00	5,8056E-01	2,4185E-02
8	7,0E-03	4,6531E-01	4,7716E-01	2,5456E+00	4,6448E-01	1,7941E-01
9	8,0E-03	3,3062E-01	3,4327E-01	3,8251E+00	3,2994E-01	2,0735E-01
10	9,0E-03	1,7572E-01	1,8372E-01	4,5549E+00	1,7664E-01	5,2569E-01
11	1,0E-02	0,0000E+00	0,0000E+00	-	0,0000E+00	-

4 Przykłady obliczeniowe

Poniżej przedstawiono przykład symulacji rozbiegu hydraulicznego przepływu obliczonego metodą elementów brzegowych programem VISCOUS UNSTEADY FLOW DUCT w przewodzie, którego brzeg został zadany krzywą Lamego (n=4, a=5.0 [mm], b=2.5 [mm]):

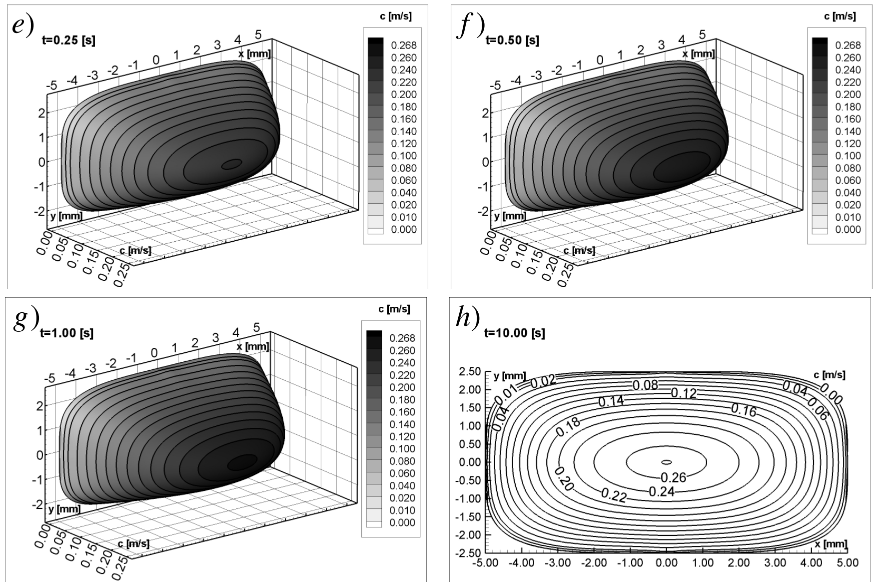
$$\left|\frac{x}{a}\right|^{n}+\left|\frac{y}{b}\right|^{n}=1\ . \tag{6}$$

Symulację wykonano dla glikolu etylenowego (μ=0.021329 [Pa*s], ρ=1115.6 [kg/m3]). Graficzne rezultaty obliczeń pól prędkości po czasie 0.005, 0.01, 0.05, 0.10, 0.25, 0.50, 1.00, 10.00 [s] zostały przedstawione na rysunkach: 4a-d, 5a-d. Obliczenia wykonano dla brzegu składającego się z 1000 linowych elementów.



Rys. 4. Rozbieg hydrauliczny w przewodzie prostoosiowym o przekroju zadanym krzywą Lamego wyznaczony metodą MEB: a) t=0.005 [s], b) t=0.01 [s], c) t=0.05 [s], d) t=0.10 [s]

Fig.4. Starting flow in a superellipse channel - BEM solution: a) t=0.005 [s], b) t=0.01 [s], c) t=0.05 [s], d) t=0.10 [s]



Rys. 5. Rozbieg hydrauliczny w przewodzie prostoosiowym o przekroju zadanym krzywą Lamego wyznaczony metodą MEB: a) t=0.25 [s], b) t=0.50 [s], c) t=1.00 [s], d) t=10.00 [s]

Fig.5. Starting flow in a superellipse channel - BEM solution: a) t=0.005 [s], a) t=0.25 [s], b) t=0.50 [s], c) t=1.00 [s],dh) t=10.00 [s]

5 Podsumowanie

Przedstawiony algorytm metody elementów brzegowych pozwala w sposób efektywny rozwiązywać zagadnienia nieustalonych przepływów w przewodach prostoliniowych niezależnie od kształtu przekroju przewodu. Metody analityczne pozwalają rozwiązać tylko najprostsze przypadki przepływu niestacjonarnego w przewodach, natomiast alternatywne metody siatkowe wymagają wykonywania pracochłonnych przestrzennych siatek. Mały błąd metody MEB w porównaniu ze znanym rozwiązaniem analitycznym świadczy o dużej dokładności algorytmu. Zakres stosowania metody może być poszerzony o przepływy w mikrokanałach, tam, gdzie makroprzepływy są zgodne z mikroprzepływami [9]. Obecnie metoda elementów brzegowych należy do intensywnie rozwijających się. Na szczególną uwagę zasługuje fakt, iż jest bardzo konkurencyjna w stosunku do najczęściej stosowanych metod siatkowych.

Literatura

1. Batchelor G. K.: *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press 2000
2. Chung T. J.: Finite *Element Analysis in Fluid Dynamic*s. Mc-Graw-Hill, New York 1978
3. Zieniewicz O. C., Taylor R. L.: *The Finite Element Method Fluid Dynamics*, Fifth Edition Vol. 3, Elsevier Singapore 2005

4. Versteeg H. K., Malalasekera W.: *Introduction to Computational Fluid Dynamics, The Finite Volume Method*, NY, 1995
5. Brebbia C. A., Telles J. F. C., Wrobel L. C.: *Boundary element Techniques. Theory and Applications in Engineering*. Springer-Verlag. NY, 1984
6. Szymanski G.: Quelques solutions exactes des équations d'hydrodynamique du fluide visqueux dans le cas d'un tube cylindrique. *Journal de mathématiques pures et appliquées* 9e série, tom 11, p. 67-108, 1932
7. White F. M.: *Viscous Fluid Flow*, Third Edition McGraw-Hill Mechanical Engineering, 2005
8. Lefebvre P. J., White F. M.: Experiments on Transition to Turbulence in a Constant-Acceleration Pipe Flow, *Journal of Fluids Engineering*, vol. 111, Issue 4, p. 428-432, 1989
9. Sharp K. V.; Adrian, R. J.: Transition from laminar to turbulent flow in liquid filled microtubes, *Experiments in Fluids*, vol. 36, Issue 5, p. 741–747, 2004

Streszczenie

W publikacji przedstawiono algorytm metody elementów brzegowych nieustalonego przepływu laminarnego cieczy lepkiej w przewodach prostoosiowych o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego. Weryfikacja metody elementów brzegowych została wykonana poprzez porównanie rezultatów obliczeń MEB ze znanym rozwiązaniem analitycznym w postaci rozbiegu hydraulicznego w przewodzie o przekroju kołowym. W publikacji wykonano przykładowe symulacje przepływów niestacjonarnych, dla których nie są znane rozwiązania analityczne. W celu wykonania walidacji metody oraz symulacji napisano autorski program obliczeniowy VISCOUS UNSTEADY FLOW DUCT w języku Fortran.

Słowa kluczowe: metoda elementów brzegowych, przepływy niestacjonarne, przewody prostoosiowe

Application Boundary Element Method to calculate unsteady flows in a duct with arbitrary cross-section

Summary

The paper presents the numerical application Boundary Element Method to calculate unsteady flows in a duct with arbitrary cross-section. The efficiency and the credibility of proposed algorithm were verified by numerical tests. This algorithm can be used to calculate unsteady flows in a duct with arbitrary cross-section e.g. starting flow in a duct. Numerical examples are presented. The computer program VISCOUS UNSTEADY FLOW DUCT was written in Fortran programming languages.

Keywords: boundary element method, duct with arbitrary cross-section, unsteady flows

Opracowanie zrealizowano w ramach pracy statutowej nr S/WBiIŚ/5/2011.