

**Piotr RYNKOWSKI**

Politechnika Białostocka, Katedra Ciepłownictwa  
ul. Wiejska 45E, Białystok  
E-mail: p.rynkowski@pb.edu.pl

## **Wpływ podziału obszaru wielospójnego na dokładność rozwiązania w metodzie elementów brzegowych**

### 1 Wprowadzenie

Metoda elementów brzegowych (MEB) należy do najbardziej znanych metod rozwiązania całkowego równania brzegowego w zagadnieniach inżynierskich. Obliczenia numeryczne wykonane przy użyciu Metody Elementów Brzegowych pozwalają na zmniejszenie układu równań zagadnienia o rząd wielkości, w stosunku do metod siatkowych. Jest to niewątpliwie zaleta metody. Jednak, mimo tej powszechnie znanej zalety metody elementów brzegowych, nie doczekała się ona dotąd tylu zastosowań komercyjnych, co metody siatkowe.

Artykuł jest poświęcony zagadnieniu wpływu podziału obszarów niejednorodnych, pozostających ze sobą w kontakcie cieplnym, na dokładność rozwiązania w metodzie elementów brzegowych.

### 2 Równanie opisujące proces ustalonego przewodzenia ciepła

Proces ustalonego przewodzenia ciepła w substancji stałej dla kilku obszarów niejednorodnych pozostających ze sobą w kontakcie cieplnym w przestrzeni dwuwymiarowej ( $R^2$ ) – w obszarze wielospójnym ( $\Lambda$ ), składającym się z ( $n$ ) podobszarów (rys. 1), ograniczonym zamkniętą linią brzegową ( $L$ ) – można w uproszczonym ujęciu opisać równaniami przewodzenia ciepła [1, 2]: w poszczególnych podobszarach:

$$\nabla^2 T(\mathbf{m}_n) = 0 \quad ; \quad \mathbf{m} \equiv \mathbf{m}(x_m, y_m) \in \Lambda \cup \Lambda_n \quad (1)$$

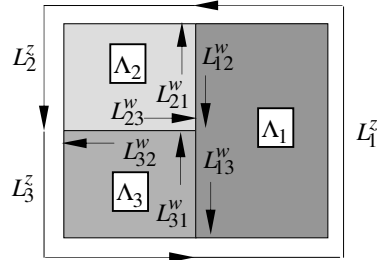
z warunkami brzegowymi:

- wyznaczającymi rozkład temperatury na zewnętrznej części brzegu ( $L_n^z$ ):

$$T(\mathbf{m}_n)|_{\mathbf{m}_n \rightarrow \mathbf{p}_n} = f_{L_n}(\mathbf{p}) \quad ; \quad \mathbf{p} \in (L_n^z) \quad , \quad (1a)$$

- wynikającymi z postulatu ciągłości strumienia ciepła na części wewnętrznej brzegu ( $L_n^w$ ) pozostającej w kontakcie z pozostałymi strukturami układu:

$$\left. \frac{\partial T(\mathbf{m}_n)}{\partial \bar{n}_n} \right|_{\mathbf{m}_n \rightarrow \mathbf{p}_n} = g_{L_n}(\mathbf{p}) \quad ; \quad \mathbf{p} \in (L_n^z) \quad . \quad (1b)$$



Rys. 1. Przykładowy obszar składający się z trzech obszarów niejednorodnych  
 Fig. 1. An example of an area consisting of three heterogeneous areas

### 3 Równania całkowite opisujące proces ustalonego przewodzenia ciepła w obszarze niejednorodnym

Obliczenia przeprowadzono, przyjmując modelowy obszar (rys. 1) składający się z trzech podobszarów.

Przyjęto następujące oznaczenia:

- $T(\mathbf{p}_1), q(\mathbf{p}_1)$  - wartości temperatury i strumienia ciepła na linii brzegowej ( $L_1^z$ ) zewnętrznej obszaru ( $\Lambda_1$ ),
- $T(\mathbf{p}_2), q(\mathbf{p}_2)$  - wartości temperatury i strumienia ciepła na linii brzegowej ( $L_2^z$ ) zewnętrznej obszaru ( $\Lambda_2$ ),
- $T(\mathbf{p}_3), q(\mathbf{p}_3)$  - wartości temperatury i strumieni ciepła na linii brzegowej ( $L_3^z$ ) zewnętrznej obszaru ( $\Lambda_3$ ),
- $T(\mathbf{p}_{12}), q(\mathbf{p}_{12}); T(\mathbf{p}_{21}), q(\mathbf{p}_{21})$  - wartości temperatury i strumienia ciepła na liniach brzegowych ( $L_{12}^w$ ) i ( $L_{21}^w$ ) wewnętrznych, między obszarami  $\Lambda_1$  i  $\Lambda_2$ ,
- $T(\mathbf{p}_{13}), q(\mathbf{p}_{13}); T(\mathbf{p}_{31}), q(\mathbf{p}_{31})$  - wartości temperatury i strumienia ciepła na liniach brzegowych ( $L_{13}^w$ ) i ( $L_{31}^w$ ) wewnętrznych, między obszarami  $\Lambda_1$  i  $\Lambda_3$ ,
- $T(\mathbf{p}_{23}), q(\mathbf{p}_{23}); T(\mathbf{p}_{32}), q(\mathbf{p}_{32})$  - wartości temperatury i strumienia ciepła na liniach brzegowych ( $L_{23}^w$ ) i ( $L_{32}^w$ ) wewnętrznych, między obszarami  $\Lambda_2$  i  $\Lambda_3$ .

Ustalone pole temperatury w rozpatrywanym obszarze wielospójnym opisuje układ trzech równań całkowitych:

$$\begin{aligned}
 T(\mathbf{p}_1) &= \int_{L_1^z} q(\mathbf{q}_1)G(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1)dL_{\mathbf{q}_1} - \int_{L_1^z} T(\mathbf{q}_1)H(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1)dL_{\mathbf{q}_1} \\
 &+ \int_{L_{12}^w} q(\mathbf{q}_{12})G(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_{12})dL_{\mathbf{q}_{12}} - \int_{L_{12}^w} T(\mathbf{q}_{12})H(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_{12})dL_{\mathbf{q}_{12}} \\
 &+ \int_{L_{13}^w} q(\mathbf{q}_{13})G(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_{13})dL_{\mathbf{q}_{13}} - \int_{L_{13}^w} T(\mathbf{q}_{13})H(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_{13})dL_{\mathbf{q}_{13}}
 \end{aligned} \tag{2a}$$

$$\begin{aligned}
 T(\mathbf{p}_2) &= \int_{L_2^z} q(\mathbf{q}_2)G(\mathbf{p}_2, \mathbf{q}_2)dL_{\mathbf{q}_2} - \int_{L_2^z} T(\mathbf{q}_2)H(\mathbf{p}_2, \mathbf{q}_2)dL_{\mathbf{q}_2} \\
 &+ \int_{L_{21}^w} q(\mathbf{q}_{21})G(\mathbf{p}_2, \mathbf{q}_{21})dL_{\mathbf{q}_{21}} - \int_{L_{21}^w} T(\mathbf{q}_{21})H(\mathbf{p}_2, \mathbf{q}_{21})dL_{\mathbf{q}_{21}} \\
 &+ \int_{L_{23}^w} q(\mathbf{q}_{23})G(\mathbf{p}_2, \mathbf{q}_{23})dL_{\mathbf{q}_{23}} - \int_{L_{23}^w} T(\mathbf{q}_{23})H(\mathbf{p}_2, \mathbf{q}_{23})dL_{\mathbf{q}_{23}}
 \end{aligned} \tag{2b}$$

$$\begin{aligned}
 T(\mathbf{p}_3) &= \int_{L_3^z} q(\mathbf{q}_3)G(\mathbf{p}_3, \mathbf{q}_3)dL_{\mathbf{q}_3} - \int_{L_3^z} T(\mathbf{q}_3)H(\mathbf{p}_3, \mathbf{q}_3)dL_{\mathbf{q}_3} \\
 &+ \int_{L_{31}^w} q(\mathbf{q}_{31})G(\mathbf{p}_3, \mathbf{q}_{31})dL_{\mathbf{q}_{31}} - \int_{L_{31}^w} T(\mathbf{q}_{31})H(\mathbf{p}_3, \mathbf{q}_{31})dL_{\mathbf{q}_{31}} \\
 &+ \int_{L_{32}^w} q(\mathbf{q}_{32})G(\mathbf{p}_3, \mathbf{q}_{32})dL_{\mathbf{q}_{32}} - \int_{L_{32}^w} T(\mathbf{q}_{32})H(\mathbf{p}_3, \mathbf{q}_{32})dL_{\mathbf{q}_{32}}
 \end{aligned} \tag{2c}$$

gdzie:

$$G(\mathbf{p}_n, \mathbf{q}_m) = \frac{1}{2\pi\lambda} \ln \frac{1}{r_{\mathbf{p}_n \mathbf{q}_m}} \quad ; \quad r_{\mathbf{p}_n \mathbf{q}_m} = \sqrt{(x_n - x_m)^2 + (y_n - y_m)^2} \quad , \tag{2*}$$

$$H(\mathbf{p}_n, \mathbf{q}_m) = \frac{\partial G(\mathbf{p}_n, \mathbf{q}_m)}{\partial \mathbf{n}_m} = \left[ \frac{\partial G(\mathbf{p}_n, \mathbf{q}_m)}{\partial x_m} \frac{dy_m}{dl_m} + \frac{\partial G(\mathbf{p}_n, \mathbf{q}_m)}{\partial y_m} \frac{dx_m}{dl_m} \right] \tag{2**}$$

Przy czym z warunku ciągłości strumienia ciepła i temperatury wewnętrznych liniach brzegowych rozgraniczających podobszary wynikają zależności:

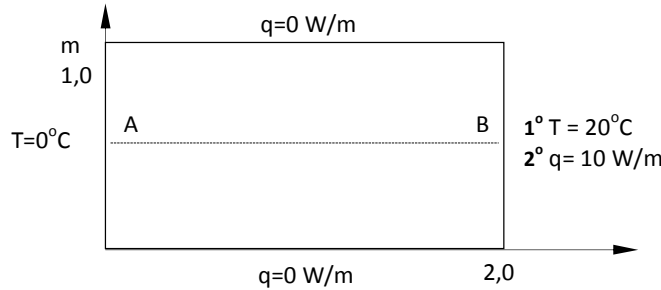
$$\begin{aligned} q(\mathbf{q}_{21}) &= -q(\mathbf{q}_{12}) & ; & & T(\mathbf{q}_{21}) &= T(\mathbf{q}_{12}) \\ q(\mathbf{q}_{13}) &= -q(\mathbf{q}_{31}) & ; & & T(\mathbf{q}_{13}) &= T(\mathbf{q}_{31}) \\ q(\mathbf{q}_{23}) &= -q(\mathbf{q}_{32}) & ; & & T(\mathbf{q}_{23}) &= T(\mathbf{q}_{32}) \end{aligned} \quad (3)$$

Układ równań całkowych (2) rozwiązuje się numerycznie, sprowadzając go do systemu algebraicznych równań liniowych [3] względem niewiadomych: rozkładu temperatury i gęstości strumienia ciepła na elementach brzegowych.

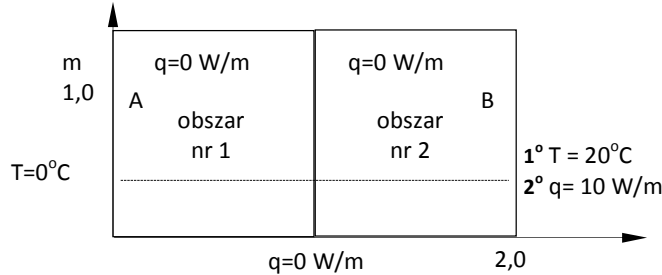
#### 4 Przykłady obliczeniowe

W celu porównania i wykazania wpływu podziału na wynik rozwiązania numerycznego wyznaczono wartości temperatur w punktach wewnętrznych obszaru, przy różnym stopniu podziału obszaru na podobszary, przy założonych warunkach brzegowych. Analizowano obszary wypukłe oraz wklęsło-wypukłe.

##### Przykład 1 – obszar wypukły



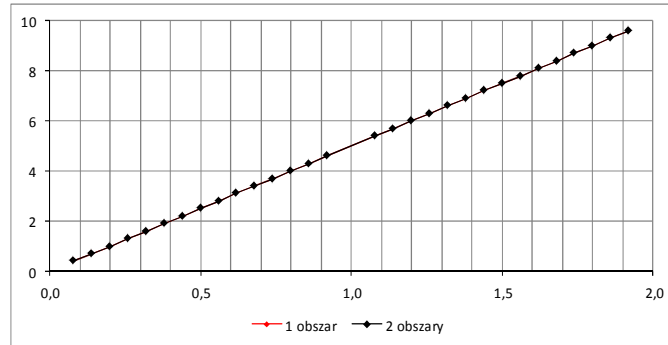
Rys. 2. Szkic do przykładu nr 1. Obszar wypukły – brak podziału na podobszary  
 Fig. 2. Sketch for example no. 1. Convex area - no division into subdivisions



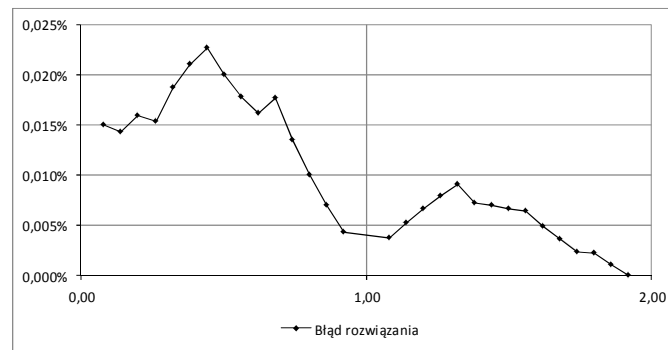
Rys. 3. Szkic do przykładu nr 1. Obszar wypukły – podział obszaru na 2 podobszary  
 Fig. 3. Sketch for example no. 1. Convex area – division area for two subdivisions

Na rysunkach (rys. 2 i 3) symbole **1°** oraz **2°** dotyczą przyjętych warunków brzegowych, odpowiednio dla analizowanych obliczeń. Rezultaty obliczeń dla przypadku pierwszego

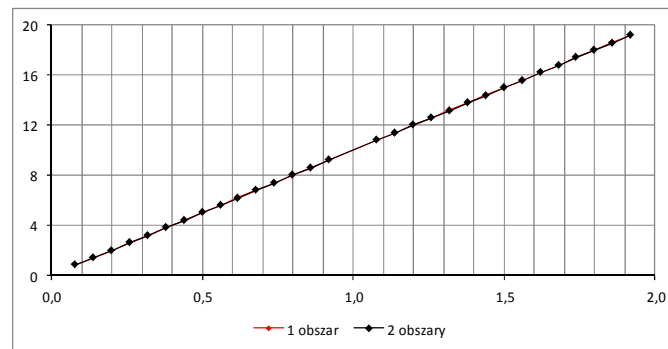
(1<sup>o</sup>) zostały przedstawione na wykresie poniżej.



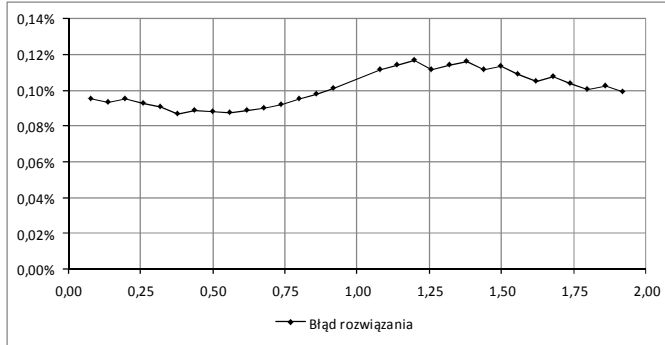
Wykres 1. Strumień ciepła na odcinku A-B (rys. 2, 3)  
Graph 1. The heat flux in the section A-B (fig. 2, 3)



Wykres 2. Błąd względny rozwiązania wzdłuż odcinka A-B (rys. 2, 3)  
Graph 2. The relative error of calculation along the segment A-B (fig. 2, 3)

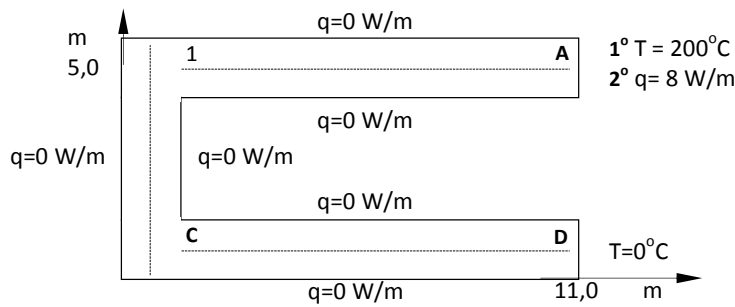


Wykres 3. Wartość temperatury na odcinku A-B (rys. 2, 3)  
Graph 3. Temperature in the section A-B (fig. 2, 3)

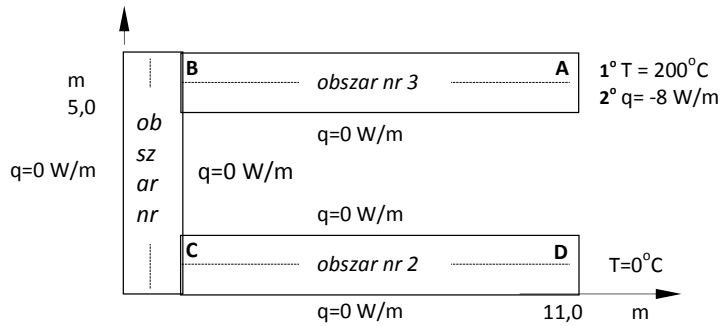


Wykres 4. Błąd względny rozwiązania wzdłuż odcinka A-B dla temperatury (rys. 2, 3)  
 Graph 4. The relative error of calculation along the segment A-B for temperature (fig. 2, 3)

**Przykład 2 – obszar wklęsło-wypukły**

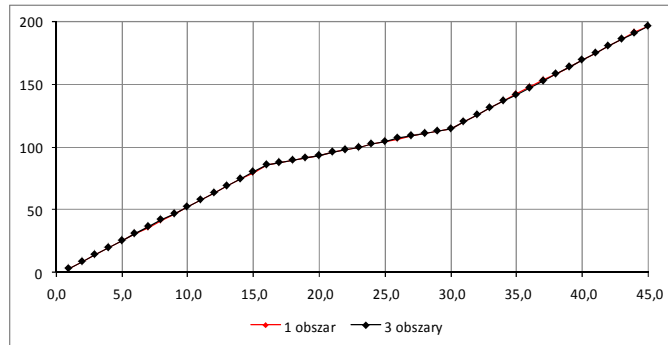


Rys. 4. Szkic do przykładu nr 2. Obszar wklęsło-wypukły – brak podziału na podobszary  
 Fig. 4. Sketch for example no. 2. Concave-convex area - no division into subdivisions

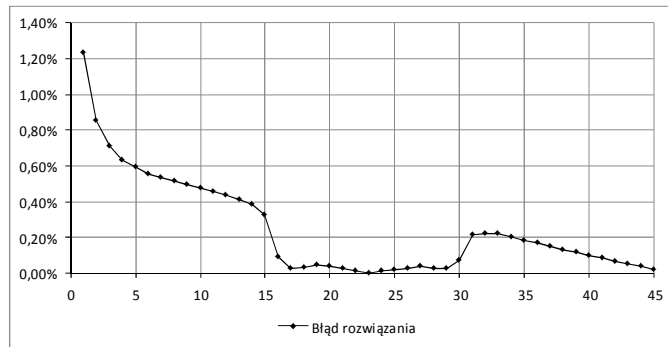


Rys. 5. Szkic do przykładu nr 2. Obszar wklęsło-wypukły – podział obszaru na 3 podobszary  
 Fig. 5. Sketch for example no. 2. Concave-convex area – division area for three subdivisions

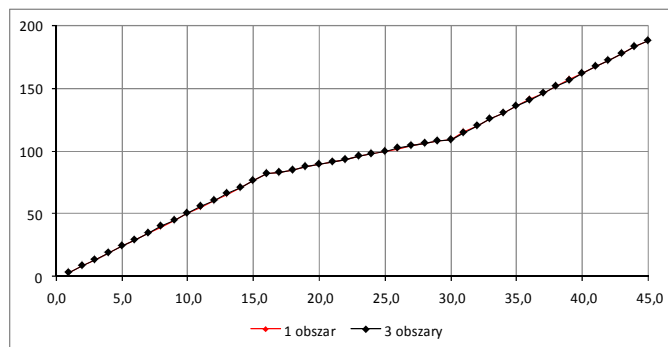
Wpływ podziału obszaru wielospójnego na dokładność rozwiązania  
w metodzie elementów brzegowych



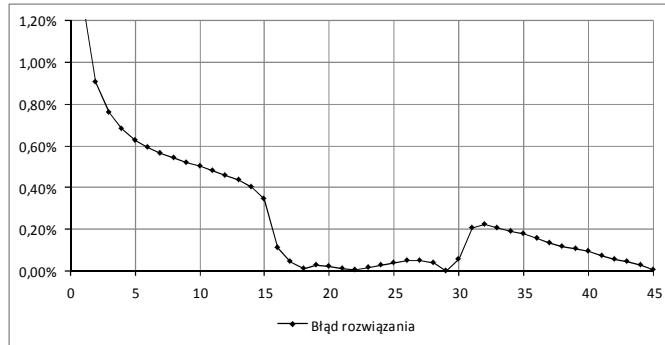
Wykres 5. Strumień ciepła na odcinku A-B-C-D (rys. 4, 5)  
Graph 5. The heat flux in the section A-B-C-D (fig. 4, 5)



Wykres 6. Błąd względny rozwiązania wzdłuż odcinka A-B-C-D (rys. 4, 5)  
Graph 6. The relative error of calculation along the segment A-B-C-D (fig. 4, 5)



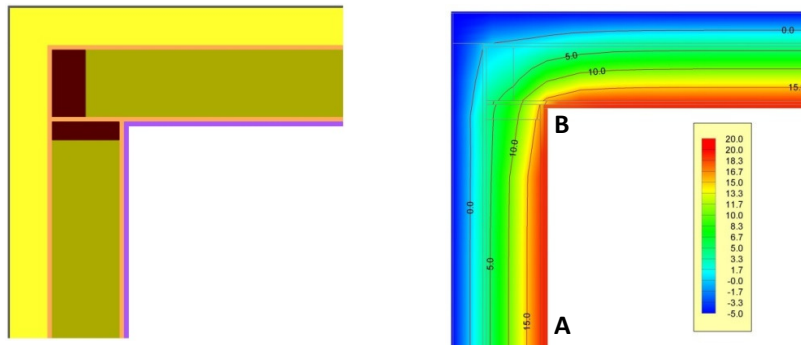
Wykres 7. Wartość temperatury na odcinku A-B-C-D (rys. 4, 5)  
Graph 7. Temperature in the section A-B-C-D (fig. 4, 5)



Wykres 8. Błąd względny rozwiązania wzdłuż odcinka A-B-C-D dla temperatury (rys. 4, 5)  
 Graph 8. The relative error of calculation along the segment A-B-C-D for temperature (fig. 4,5)

**Przykład 3**

W trzecim przykładzie przedstawiono mostek cieplny rzeczywistego obiektu wykonanego w technologii drewnianej [4] (struktura, rys. 6)



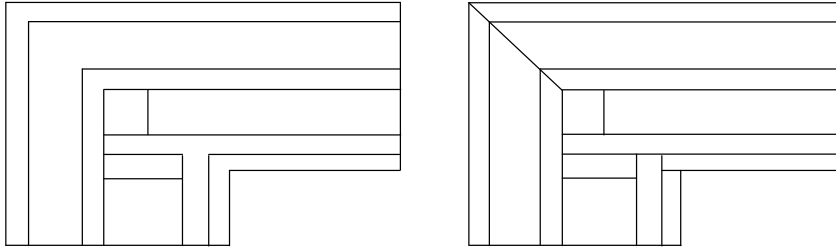
Rys. 6. Struktura obszaru wielospójnego (strona lewa) i wyznaczone pole temperatury (strona prawa)

Fig. 6. The structure of the multidomains area (left) and set the temperature field (right)

Analizowany mostek cieplny podzielono w pierwszym przypadku na 9, a w drugim na 14 podobszarów (rys. 7).



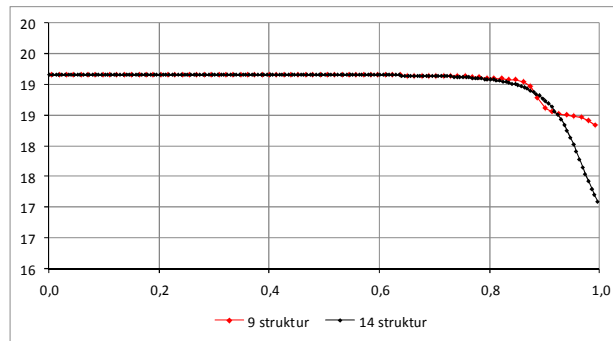
*Wpływ podziału obszaru wielospójnego na dokładność rozwiązania  
w metodzie elementów brzegowych*



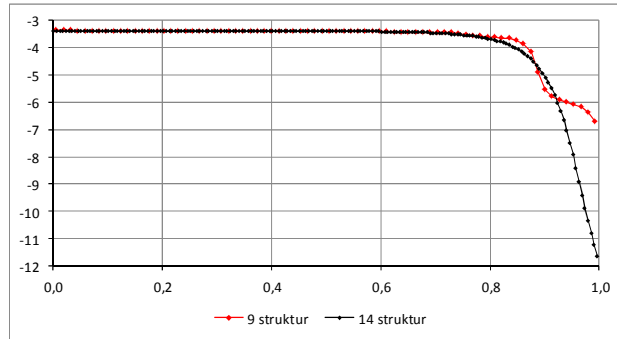
Rys. 7. Podział obszaru na 9 (lewa strona) i 14 podobszarów (prawa)  
Fig. 7. Area division for 9 (left) and 14 sub-areas (right)

**Wyniki obliczeń numerycznych**

Różnica temperatur	$\Delta\Theta$	25	25	K
Liniowy współczynnik przenikania ciepła	$\Psi_e$	-0,045	-0,046	W / (mK)
Minimalna temperatura na powierzchni wewnętrznej przegrody	$\Theta_{\min}$	18,27	17,05	°C
Czynnik temperatury liniowego mostka cieplnego na wewnętrznej powierzchni	$f_{Rsi}$	0,931	0,882	-



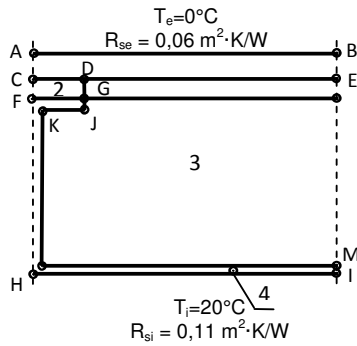
Wykres 9. Wartość temperatury na odcinku A-B (rys. 6)  
Graph 9. Temperature in the section A-B (fig. 6)



Wykres 10. Strumień ciepła na odcinku A-B (rys. 6)  
 Graph 10. The heat flux in the section A-B (fig. 6)

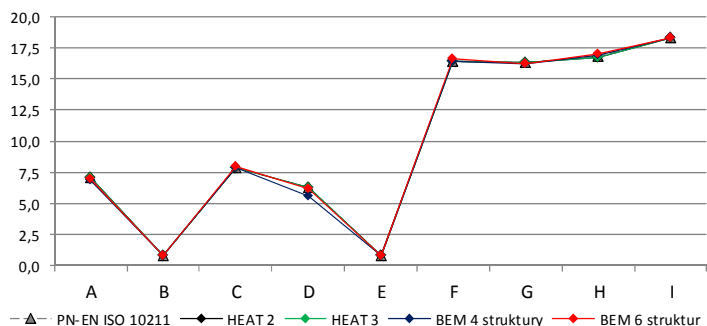
**Przykład 4**

W celu weryfikacji dokładności rozwiązania przeanalizowano dwuwymiarowe przewodzenie ciepła dla przykładu przedstawionego w normie EN ISO 10211:2007 „Thermal bridges in building construction – Heat flows and surface temperatures – Detailed calculations” [5] (Mostki cieplne w konstrukcjach budowlanych - Strumienie ciepła i temperatura powierzchni – Obliczenia szczegółowe). Wyniki obliczeń przy różnym podziale obszaru na podobszary, wykonane przy użyciu metody elementów brzegowych, porównano z wynikami uzyskanymi metodami siatkowymi, zamieszczonymi w przywołanej normie [6].

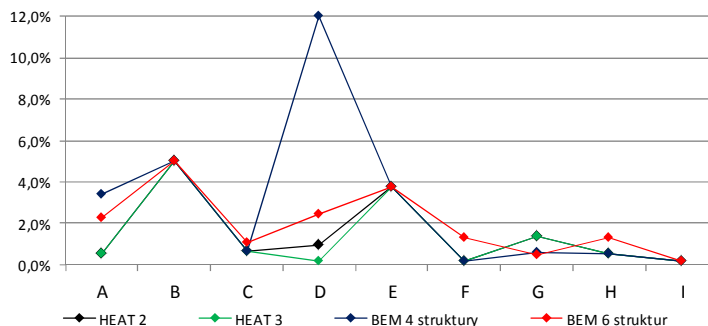


Rys. 8. Przykład obliczeniowy zamieszczony w normie EN ISO 10211:2007  
 Fig. 8. Example of calculation set out in EN ISO 10211:2007

*Wpływ podziału obszaru wielospójnego na dokładność rozwiązania  
w metodzie elementów brzegowych*



Wykres 11. Wartości temperatur w poszczególnych punktach (rys. 8)  
Graph 11. Temperatures at various points (fig. 8)



Wykres 12. Błąd względny rozwiązania w poszczególnych punktach (rys. 8)  
Graph 12. The relative error for each point solution (fig. 8)

## 5 Wnioski

Dla przykładu obliczeniowego nr 1, błąd względny rozwiązania (jako wartość odniesienia przyjęto wartość przy braku podziału obszaru na podobszary, rys. 2) jest poniżej 0,12%. W tym przypadku, dla dwóch prostych obszarów niejednorodnych, można stwierdzić, że podział obszaru na dwa podobszary nie wpływa na wynik rozwiązania. W przykładzie nr 2 błąd rośnie do 1,2%. Wynika to ze wzrostu złożoności obszaru. Z punktu widzenia inżynierskiego wyznaczony błąd względny w postaci krzywej (wykres 6 oraz wykres 8) jest do przyjęcia. Dla obszarów złożonych (rys. 8), przy podobnym stopniu dyskretyzacji brzegu, można stwierdzić, że podział obszaru na podobszary wpływa na wynik rozwiązania. Dla przypadku nr 4 błąd względny rozwiązania (przyjęto, że wartościami odniesienia są wyniki obliczeń otrzymane za pomocą metod siatkowych, przedstawione w normie [5]) rozwiązania dochodzi do 12% (wykres 12). Jest to stosunkowo duży błąd i w tego typu obliczeniach nie do zaakceptowania. Na podstawie wykonanego eksperymentu numerycznego nie można stwierdzić jednoznacznie, jakie są przyczyny błędów – na ile wpływ na rozwiązanie ma stopień dyskretyzacji brzegu przy różnym stopniu podziału obszaru na podobszary,

a na ile sam stopień podziału obszaru na podobszary.

Wpływ podziału obszaru wielospójnego na dokładność rozwiązania w metodzie elementów brzegowych wymaga dalszych badań. Na podstawie przykładu nr 4 można stwierdzić jednoznacznie, że dokładniejszy podział obszaru daje dokładniejsze wyniki. Z punktu widzenia inżynierskiego odpowiedni podział obszaru na poszczególne obszary jest istotny, gdyż wpływa na wynik obliczeń numerycznych

#### Literatura

1. Brebbia C.A., Telles J.F.C., Wrobel L.C.: *Boundary Element Techniques. Theory and Applications in Engineering*. Springer-Verlag, NY 1984
2. Majchrzak E.: *Metoda elementów brzegowych w przepływie ciepła*, Wyd. Pol. Częstochowskiej, 2001
3. Katsikadelis J. T.: *Boundary elements: Theory and Applications*, Elsevier Science Ltd, 2002
4. Rynkowski P., Teleszewski T.J.: Modelowanie pola temperatury mostków cieplnych przy wykorzystaniu metody elementów brzegowych, *Budownictwo i Inżynieria Środowiska*, Wydawnictwo Politechniki Białostockiej, vol. 2, nr 1 (2011), s. 85-90
5. EN ISO 10211: 2007, „*Thermal bridges in building construction — Heat flows and surface temperatures - Detailed calculations*”

#### Streszczenie

Artykuł przedstawia eksperyment numeryczny, który jest próbą odpowiedzi na pytanie, jaki jest wpływ podziału obszaru wielospójnego na podobszary na dokładność rozwiązania w metodzie elementów brzegowych. Porównując wyniki obliczeń numerycznych do wyników metod siatkowych, obserwuje się wpływ podziału obszaru na podobszary, zwłaszcza w obszarach o złożonej geometrii. W artykule przedstawiono przykłady obszarów o różnym stopniu złożoności. Na podstawie przykładów można stwierdzić, że wpływ ten istnieje i zagadnienie wymaga dalszych badań.

**Słowa kluczowe:** metoda elementów brzegowych, obszary niejednorodne, dokładność rozwiązania

## **Effect of dividing the area for the accuracy of solution in the boundary element method**

### **Abstract**

This paper presents the numerical experiment, which attempts to answer the question, what is the effect of dividing the area into multi-domains area for the accuracy of the solution in the boundary element method. Comparing the results of the numerical calculations with mesh methods, it is shown the effect of dividing the area into multi-domains, particularly in areas with complex geometry. The paper presents examples of areas with different levels of complexity. Based on the examples it can be concluded that this effect exists and issue requires further study.

**Keywords:** boundary element method, heterogeneous areas, the accuracy of solutions

Opracowanie zrealizowane w ramach pracy statutowej S/WBIŚ/5/2011.

