

Piotr RYNKOWSKI, Tomasz Janusz TELESZEWSKI

Politechnika Białostocka, Katedra Ciepłownictwa
ul. Wiejska 45E
E-mail: rynkowski@pb.edu.pl; tjt@pb.edu.pl.

Pole temperatury wybranych detali budowlanych przy wykorzystaniu wielospójnych obszarów MEB

1 Wprowadzenie

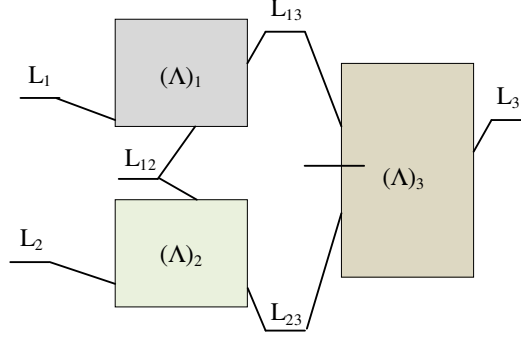
Numeryczne rozwiązywanie zagadnień dotyczących symulacji przewodzenia ciepła w detalach architektonicznych stanowi nieodzowny element przy prawidłowym projektowaniu budynków niskoenergetycznych, a w ostatnim czasie opisywanych w literaturze budynków tzw. „zeroenergetycznych”. Prace dotyczące Metody Elementów Brzegowych pokazują jej wysoką dokładność przy dla obszarów jednorodnych oraz wypukłych. W zagadnieniach inżynierskich występują obszary wielospójne, najczęściej wklęsło-wypukłe. Detale architektoniczne będą miały właśnie taką strukturę.

W artykule przedstawiono numeryczne modelowania pól temperatury wybranych przykładów mostków cieplnych przy wykorzystaniu metody elementów brzegowych. Artykuł przedstawia, że obszary wielospójne, jakimi są rozpatrywane przegrody złożone w postaci mostków cieplnych mogą być skutecznie analizowane przy wykorzystaniu metody, która bardzo szybko się rozwija na świecie – metody elementów brzegowych. Artykuł jest próbą zaprezentowania, że do tego typu zagadnień metoda może być metodą konkurencyjną w stosunku do metod siatkowych, takich jak metoda różnic skończonych, metoda elementów skończonych oraz metoda objętości skończonych.

2 Warunki brzegowe dla równań różniczkowych opisujących proces ustalonego przewodzenia ciepła w obszarze niejednorodnym

Dla ustalonego przewodzenia ciepła w przestrzeni dwuwymiarowej otrzymujemy następujące warunki brzegowe [1]:

- warunek brzegowy Dirichleta, określający temperaturę na linii brzegowej obszaru,
- warunek brzegowy Neumanna, określający strumień ciepła przenikający przez linię brzegową obszaru.



Rys.1. Podział linii brzegowej w przykładowym obszarze wielospójnym
($L = L1 \cap L2 \cap L3$)

Dla kilku obszarów niejednorodnych pozostających z sobą w kontakcie cieplnym (rys.1), zagadnienia brzegowe Dirichleta i Neumanna dla równań różniczkowych Laplace'a i Poisson'a opisujących procesy ustalonego przewodzenia ciepła w przestrzeni dwuwymiarowej (R^2) w obszarze (Λ) ograniczonym zamkniętą linią brzegową (L) można sformułować w następującej postaci [2]:

- dla jednego obszaru,

$$\nabla^2 T_1 = 0; \quad T_1(\bar{M}) \Big|_{\bar{M}=\bar{P}} = f_L(\bar{P}); \quad (\bar{P}) \in (L) \quad (1a)$$

$$\nabla^2 T_1 = 0; \quad \frac{\partial T_1(\bar{M})}{\partial n_M} \Big|_{(\bar{M}=\bar{P})} = g_L(\bar{P}); \quad (\bar{P}) \in (L) \quad (1b)$$

- dla drugiego obszaru,

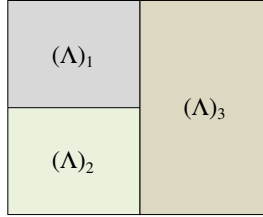
$$\nabla^2 T_2 = 0; \quad T_2(\bar{M}) \Big|_{\bar{M}=\bar{P}} = f_L(\bar{P}); \quad (\bar{P}) \in (L) \quad (2a)$$

$$\nabla^2 T_2 = 0; \quad \frac{\partial T_2(\bar{M})}{\partial n_M} \Big|_{(\bar{M}=\bar{P})} = g_L(\bar{P}); \quad (\bar{P}) \in (L) \quad (2b)$$

- dla trzeciego obszaru,

$$\nabla^2 T_3 = 0; \quad T_3(\bar{M}) \Big|_{\bar{M}=\bar{P}} = f_L(\bar{P}); \quad (\bar{P}) \in (L) \quad (3a)$$

$$\nabla^2 T_3 = 0; \quad \left. \frac{\partial T_3(\bar{M})}{\partial \bar{n}_M} \right|_{(\bar{M}=\bar{P})} = g_L(\bar{P}); \quad (\bar{P}) \in (L) \quad (3b)$$



Rys.2. Przykładowy obszar składający się z trzech obszarów niejednorodnych

3 Równania całkowe opisujące proces ustalonego przewodzenia ciepła w obszarze niejednorodnym

Na styku obszarów przyjęto warunek ciągłości strumienia i temperatury:

$$\begin{aligned} T_1(\bar{M}) \Big|_{\bar{M}=\bar{P}_1} &= T_2(\bar{M}) \Big|_{\bar{M}=\bar{P}_2}; \quad (\bar{P}_1) \in (L), (\bar{P}_2) \in (L) \\ T_1(\bar{M}) \Big|_{\bar{M}=\bar{P}_1} &= T_3(\bar{M}) \Big|_{\bar{M}=\bar{P}_3}; \quad (\bar{P}_1) \in (L), (\bar{P}_3) \in (L) \\ T_2(\bar{M}) \Big|_{\bar{M}=\bar{P}_2} &= T_3(\bar{M}) \Big|_{\bar{M}=\bar{P}_3}; \quad (\bar{P}_2) \in (L), (\bar{P}_3) \in (L) \end{aligned} \quad (4a)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T_1(\bar{M})}{\partial \bar{n}_M} \right|_{(\bar{M}=\bar{P}_1)} &= - \left. \frac{\partial T_2(\bar{M})}{\partial \bar{n}_M} \right|_{(\bar{M}=\bar{P}_2)}; \quad (\bar{P}_1) \in (L), (\bar{P}_2) \in (L) \\ \left. \frac{\partial T_1(\bar{M})}{\partial \bar{n}_M} \right|_{(\bar{M}=\bar{P}_1)} &= - \left. \frac{\partial T_3(\bar{M})}{\partial \bar{n}_M} \right|_{(\bar{M}=\bar{P}_3)}; \quad (\bar{P}_1) \in (L), (\bar{P}_3) \in (L) \\ \left. \frac{\partial T_2(\bar{M})}{\partial \bar{n}_M} \right|_{(\bar{M}=\bar{P}_2)} &= - \left. \frac{\partial T_3(\bar{M})}{\partial \bar{n}_M} \right|_{(\bar{M}=\bar{P}_3)}; \quad (\bar{P}_2) \in (L), (\bar{P}_3) \in (L) \end{aligned} \quad (4b)$$

Przyjęto następujące założenia (rys.2):

- T_1, q_1 – wektory zawierające wartości temperatur i strumieni ciepła na zewnętrznej powierzchni obszaru L_1 ,
- T_2, q_2 – wektory zawierające wartości temperatur i strumieni ciepła na zewnętrznej powierzchni obszaru L_2 ,
- T_3, q_3 – wektory zawierające wartości temperatur i strumieni ciepła na zewnętrznej powierzchni obszaru L_3 ,

- $T_{12}, T_{21}, q_{12}, q_{21}$ – wektory zawierające wartości temperatur i strumieni ciepła na wspólnej powierzchni obszaru L_{12} , między obszarami Λ_1 i Λ_2 ,
- $T_{13}, T_{31}, q_{13}, q_{31}$ – wektory zawierające wartości temperatur i strumieni ciepła na wspólnej powierzchni obszaru L_{13} , między obszarami Λ_1 i Λ_3 ,
- $T_{23}, T_{32}, q_{23}, q_{32}$ – wektory zawierające wartości temperatur i strumieni ciepła na wspólnej powierzchni obszaru L_{23} , między obszarami Λ_2 i Λ_3 .

Ustalone pole temperatury dla pierwszego obszaru Λ_1 prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{aligned} T(P) + \int_{L_1} q_1 T_1^*(P, Q) dL_1 + \int_{L_{12}} q_{12} T_{12}^*(P, Q) dL_{12} + \\ + \int_{L_{13}} q_{13} T_{13}^*(P, Q) dL_{13} = \int_{L_1} T_1 q_1^*(P, Q) dL_1 + \\ + \int_{L_{12}} T_{12} q_{12}^*(P, Q) dL_{12} + \int_{L_{13}} T_{13} q_{13}^*(P, Q) dL_{13} \end{aligned} \quad (5a)$$

Ustalone pole temperatury dla drugiego obszaru Λ_2 prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{aligned} T(P) + \int_{L_2} q_2 T_2^*(P, Q) dL_2 + \int_{L_{21}} q_{21} T_{21}^*(P, Q) dL_{21} + \\ + \int_{L_{23}} q_{23} T_{23}^*(P, Q) dL_{23} = \int_{L_2} T_2 q_2^*(P, Q) dL_2 + \\ + \int_{L_{21}} T_{21} q_{21}^*(P, Q) dL_{21} + \int_{L_{23}} T_{23} q_{23}^*(P, Q) dL_{23} \end{aligned} \quad (5b)$$

Ustalone pole temperatury dla trzeciego obszaru Λ_3 prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{aligned} T(P) + \int_{L_3} q_3 T_3^*(P, Q) dL_3 + \int_{L_{31}} q_{31} T_{31}^*(P, Q) dL_{31} + \\ + \int_{L_{32}} q_{32} T_{32}^*(P, Q) dL_{32} = \int_{L_3} T_3 q_3^*(P, Q) dL_3 + \\ + \int_{L_{31}} T_{31} q_{31}^*(P, Q) dL_{31} + \int_{L_{32}} T_{32} q_{32}^*(P, Q) dL_{32} \end{aligned} \quad (5c)$$

Warunek ciągłości strumienia i temperatury (4a,4b) można zapisać w postaci,

$$\begin{cases} q_{12} = -q_{21} \\ q_{13} = -q_{31} \\ q_{23} = -q_{32} \end{cases} \quad \begin{cases} T_{12} = T_{21} \\ T_{13} = T_{31} \\ T_{23} = T_{32} \end{cases} \quad (6)$$

których jądra całkowe (rozwiązania podstawowe) są odpowiednio równe:

$$G_{ij} = \frac{1}{2\pi\lambda} \int_{L_j} \ln \frac{1}{r_{PQ}} dL_j \quad (7a)$$

$$H_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_{L_j} \frac{\cos(\bar{n}_Q; r_{PQ})}{r_{PQ}} dL_j \quad (7b)$$

gdzie:

$$\cos(\bar{n}_Q; r_{PQ}) = (Q_x - P_x^i) \cos \alpha_x + (Q_y - P_y^i) \cos \alpha_y \quad (8)$$

$$r_{PQ} = \sqrt{(Q_x - P_x^i)^2 + (Q_y - P_y^i)^2} \quad (9)$$

Gdy punkt obserwacji P (punktowe źródło ciepła) pokrywa się z rozpatrywanym punktem Q (i=j) wówczas:

$$\begin{cases} G_{ij} = \frac{1}{2\pi\lambda} \left(1 + \ln \frac{2}{1} \right) \\ H_{ij} = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Po wyznaczeniu wartości brzegowych temperatur i strumieni ciepła temperaturę w węzłach wewnętrznych wyznacza się traktując każdy obszarów jako niezależny obszar. Temperaturę w punkcie wewnętrznym wyznacza się uwzględniając tylko linię brzegową przynależną do danego obszaru:

$$T(M) = \int_L Tq^*(M, Q) dL - \int_L qT^*(M, Q) dL \quad (11)$$

gdzie:

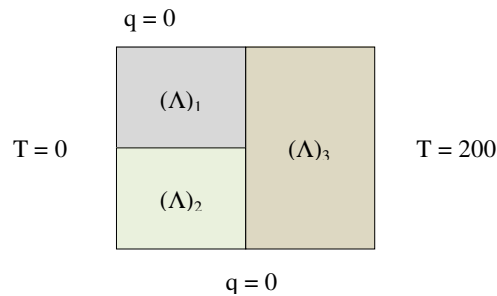
$$\int_L T^*(M, Q) dL = \frac{1}{2\pi\lambda} \int_L \ln \frac{1}{r_{MQ}} dL \quad (12)$$

$$\int_L q^*(M, Q) dL = \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{\cos(\bar{n}_Q; r_{MQ})}{r_{MQ}} dL \quad (13)$$

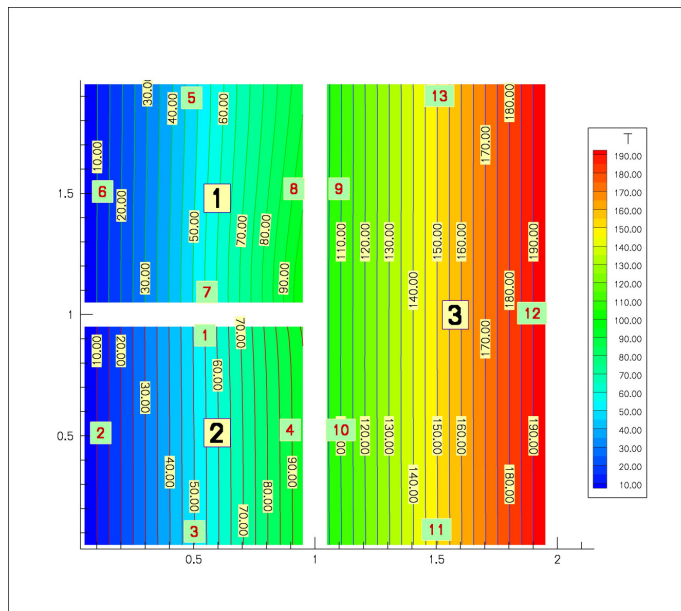
4 Przykład obliczeniowy

Wyznaczono pole temperatury dla obszaru składającego się z trzech podobszarów z rys. 1 przy warunkach brzegowych zgodnie z rys. 3. Warunki brzegowe dobrano w celu szybkiej weryfikacji wyników obliczeń numerycznych.

Na potrzeby artykułu napisano autorski program komputerowy.



Rys.3. Warunki brzegowe dla obszaru składającego się z trzech podobszarów
Wyniki obliczeń – pole temperatury - zostały przedstawione na rysunku 4.



Rys.4. Pole temperatury dla obszaru z rysunku nr 3

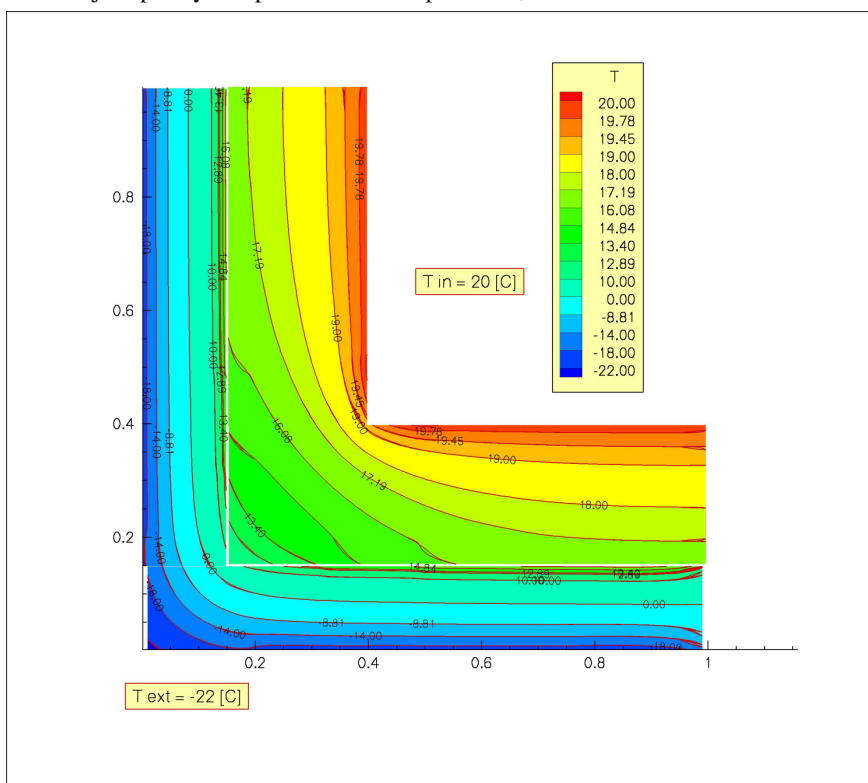
Pola temperatury na poszczególnych obszarach zostały „zszyte” – istnieje ciągłość strumienia ciepła i temperatury odpowiednio na obszarach jeden-dwa, dwa-trzy

oraz jeden-trzy. Na tej podstawie przyjęto stworzony algorytm jako poprawny do dalszych obliczeń numerycznych.

5 Pole temperatury wybranych detali budowlanych

5.1 Pole temperatury w narożu przegrody budowlanej

Wyznaczono pole temperatury w przegrodzie budowlanej, w narożniku. Przyjęto, że temperatura po stronie wewnętrznej przegrody jest równa temperaturze normowej i wynosi 20°C , natomiast temperatura zewnętrzna odpowiada IV strefie i wynosi -22°C . Całkowita grubość izolacji termicznej wynosi 15 cm. Przyjęto do obliczeń numerycznych, współczynnik przewodzenia ciepła warstwy konstrukcyjnej $\lambda = 0,77 \text{ W/mK}$, natomiast dla izolacji współczynnik przewodzenia ciepła $\lambda = 0,04 \text{ W/mK}$.

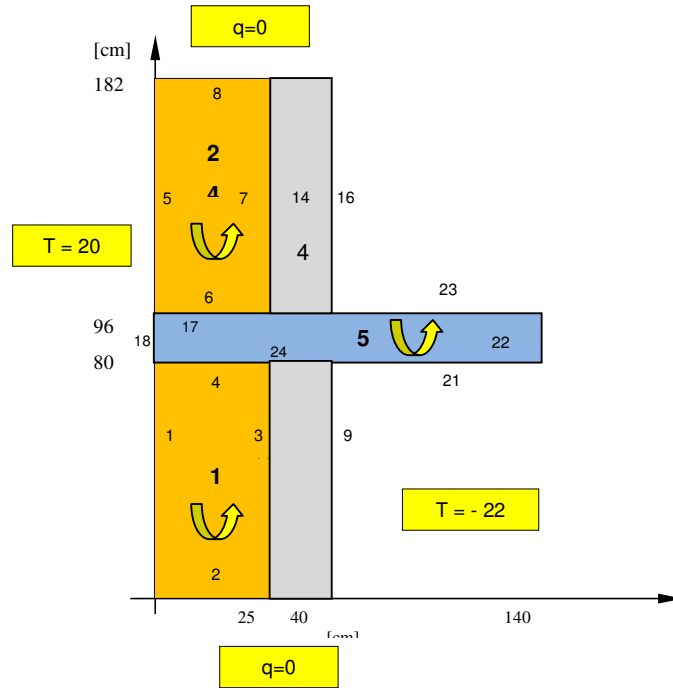


Rys.5. Pole temperatury dla naroża przegrody

5.2 Pole temperatury w płycie balkonowej bez izolacji cieplnej

Wyznaczono pole temperatury w przekroju poprzecznym płyty balkonowej, dla której brak jest izolacji termicznej. Warunki brzegowe założono identyczne jak w przykładzie z podpunktu 4.1. Dla płyty stropowej przyjęto wartość współczynnik przewodzenia ciepła jak dla żelbetu $\lambda = 1,00 \text{ W/mK}$.

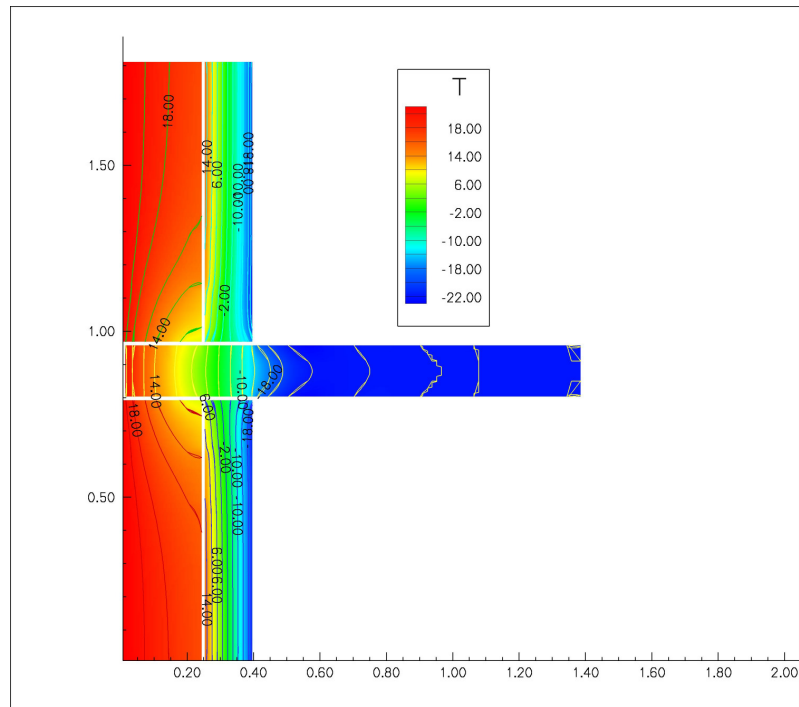
Na rysunku 6 przedstawiono dyskretyzację obszaru na podobszary, jaki został dokonano w celu wykonania obliczeń numerycznych.



Rys.6. Szkic przedstawiający stopień dyskretyzacji obszaru dla zagadnienia z podpunktu 4.2.

Na rysunku (nr 6) dla większej czytelności, nie wykonywano przykładowej dyskretyzacji linii brzegowej na panele cząstkowe. Zaznaczono kierunek numeracji węzłów i numery linii brzegowych dla odpowiadających im podobszarów.

Po dyskretyzacji brzegu całki 7a oraz 7b zostały rozwiązane numerycznie [4], natomiast układy równań całkowych zastąpiono układem równań liniowych. Należy zwrócić uwagę, że macierz układu rozwiązującego nie jest pełna, jak to ma miejsce dla jednego obszaru [5]. Wyniki obliczeń numerycznych zostały przedstawione na rysunku 7.



Rys.7. Pole temperatury w przekroju płyty podłogowej dla zagadnienia z podpunktu 4.2.

5.3 Pole temperatury w płycie balkonowej z izolacją termiczną

W celu wyznaczenia pola temperatury w przekroju płyty balkonowej należy przyporządkować odpowiednie linie brzegowe odpowiadającym im obszarom. W rozpatrywanym przypadku jest 8 podobszarów oraz 42 krawędzie. Na rysunku 8 został przedstawiony podział obszaru oraz występujące w przykładzie krawędzie poszczególnych podobszarów.

Dane z pliku tekstowego do programu numerycznego przedstawiono poniżej:

```

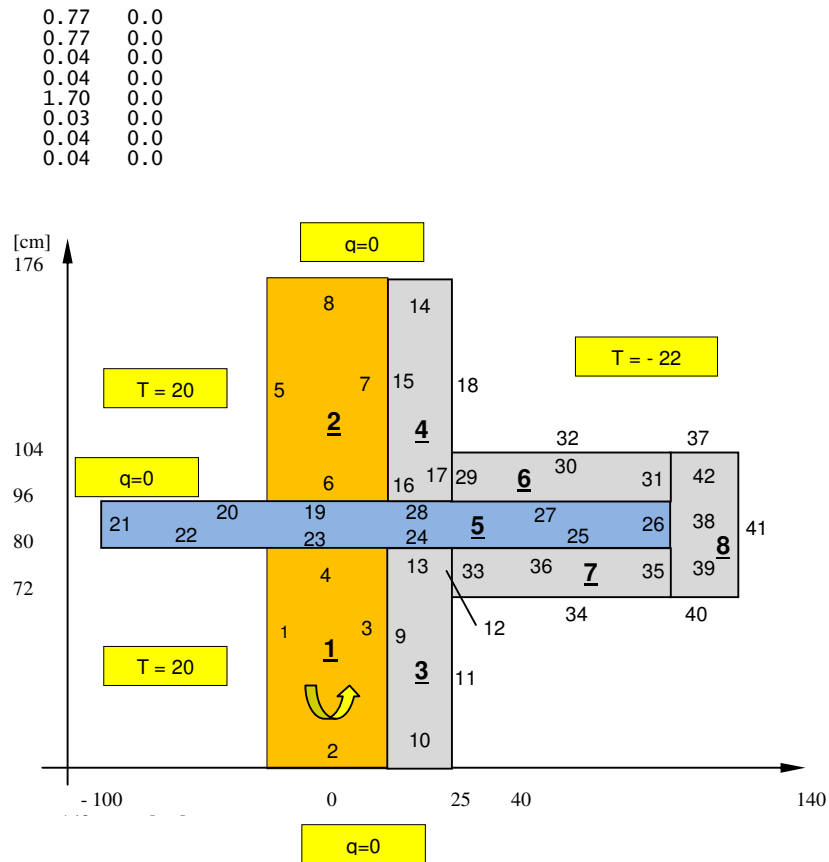
8      Liczba struktur
4      Liczba krawędzi w strukturze nr 1
4      Liczba krawędzi w strukturze nr 2
5      Liczba krawędzi w strukturze nr 3
5      Liczba krawędzi w strukturze nr 4
10     Liczba krawędzi w strukturze nr 5
4      Liczba krawędzi w strukturze nr 6
4      Liczba krawędzi w strukturze nr 7
6      Liczba krawędzi w strukturze nr 8
    
```

Struktura	1	Krawędź	2	XP1	YP2	XK3	YK4	IDW7	FP8	FK9	LP10
1	1	0.0	0.8	0.0	0.0	1	20.0	20.0	10		
1	2	0.0	0.0	0.25	0.0	2	0.0	0.0	10		
1	3	0.25	0.0	0.25	0.8	3	0.0	0.0	10		
1	4	0.25	0.8	0.0	0.8	3	0.0	0.0	10		
2	5	0.0	1.76	0.0	0.96	1	20.0	20.0	10		
2	6	0.0	0.96	0.25	0.96	3	0.0	0.0	10		
2	7	0.25	0.96	0.25	1.76	3	0.0	0.0	10		
2	8	0.25	1.76	0.0	1.76	2	0.0	0.0	10		
3	9	0.25	0.8	0.25	0.0	3	0.0	0.0	10		
3	10	0.25	0.0	0.4	0.0	2	0.0	0.0	10		
3	11	0.4	0.0	0.4	0.72	1	-22.0	-22.0	10		
3	12	0.4	0.72	0.4	0.8	3	0.0	0.0	10		
3	13	0.4	0.8	0.25	0.8	3	0.0	0.0	10		
4	14	0.4	1.76	0.25	1.76	2	0.0	0.0	10		
4	15	0.25	1.76	0.25	0.96	3	0.0	0.0	10		
4	16	0.25	0.96	0.4	0.96	3	0.0	0.0	10		
4	17	0.4	0.96	0.4	1.04	3	0.0	0.0	10		
4	18	0.4	1.04	0.4	1.76	1	-22.0	-22.0	10		
5	19	0.25	0.96	0.0	0.96	3	0.0	0.0	10		
5	20	0.0	0.96	-1.0	0.96	1	20.0	20.0	10		
5	21	-1.0	0.96	-1.0	0.80	2	0.0	0.0	10		
5	22	-1.0	0.80	0.0	0.80	1	20.0	20.0	10		
5	23	0.0	0.80	0.25	0.8	3	0.0	0.0	10		
5	24	0.25	0.80	0.4	0.8	3	0.0	0.0	10		
5	25	0.4	0.8	1.4	0.8	3	0.0	0.0	10		
5	26	1.4	0.8	1.4	0.96	3	0.0	0.0	10		
5	27	1.4	0.96	0.4	0.96	3	0.0	0.0	10		
5	28	0.4	0.96	0.25	0.96	3	0.0	0.0	10		
6	29	0.4	1.04	0.4	0.96	3	0.0	0.0	10		
6	30	0.4	0.96	1.4	0.96	3	0.0	0.0	10		
6	31	1.4	0.96	1.4	1.04	3	0.0	0.0	10		
6	32	1.4	1.04	0.4	1.04	1	-22.0	-22.0	10		
7	33	0.4	0.80	0.4	0.72	3	0.0	0.0	10		
7	34	0.4	0.72	1.4	0.72	1	-22.0	-22.0	10		
7	35	1.4	0.72	1.4	0.80	3	0.0	0.0	10		
7	36	1.4	0.80	0.4	0.80	3	0.0	0.0	10		
8	37	1.4	1.04	1.4	0.96	3	0.0	0.0	10		
8	38	1.4	0.96	1.4	0.80	3	0.0	0.0	10		
8	39	1.4	0.80	1.4	0.72	3	0.0	0.0	10		
8	40	1.4	0.72	1.48	0.72	1	-22.0	-22.0	10		
8	41	1.48	0.72	1.48	1.04	1	-22.0	-22.0	10		
8	42	1.48	1.04	1.4	1.04	1	-22.0	-22.0	10		

13 Liczba krawędzi wspólnych w strukturach

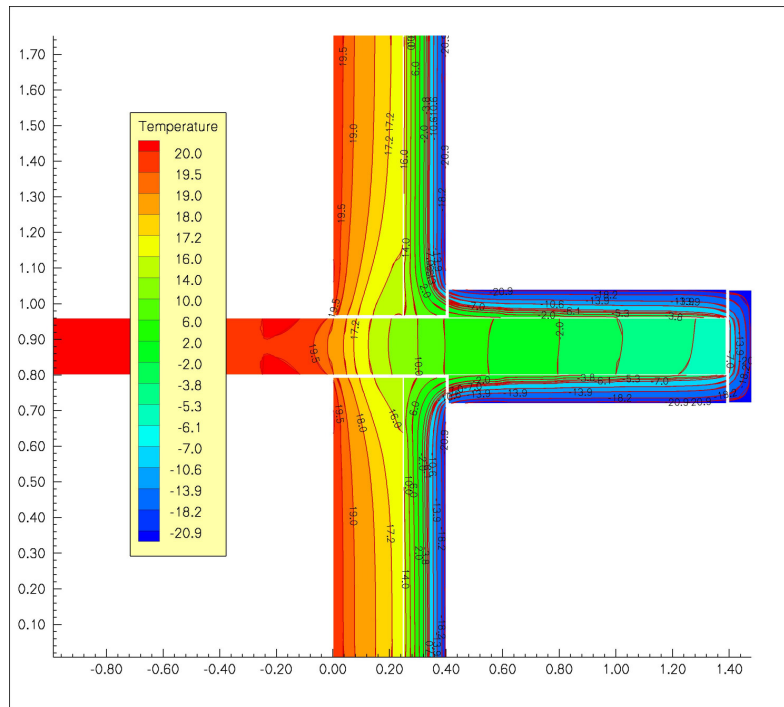
19	6	1 - krawędzie wspólne
23	4	2
28	16	3
24	13	4
9	3	5
15	7	6
29	17	7
33	12	8
27	30	9
25	36	10
37	31	11
38	26	12
39	35	13

*Pole temperatury wybranych detali budowlanych
przy wykorzystaniu wielospójnych obszarów MEB*



Rys.8. Podział obszaru na podobszary oraz krawędzie poszczególnych podobszarów.

Wyznaczono pole temperatury w przekroju poprzecznym płyty balkonowej z przykładu z podpunktu 4.2. po wykonaniu izolacji termicznej wykonanej ze styropianu o grubości 5 cm o współczynniku przenikania ciepła $\lambda = 0,033 \text{ W/mK}$. Pozostałe warunki brzegowe jak dla przykładu z podpunktu 4.2.



Rys.9. Pole temperatury w przekroju płyty podłogowej po wykonaniu izolacji termicznej.

Na rysunkach 7 oraz 9 zakres przedstawionych temperatur jest identyczny. Widać wyraźnie dużo wyższe wartości temperatur płyty balkonowej w przypadku wykonania izolacji termicznej.

6 Wnioski

Artykuł pokazuje możliwość skutecznego wykorzystania metody elementów brzegowych do wyznaczania pól temperatury w przegrodach budowlanych – mostkach cieplnych. Pozwala na wyznaczenie wartości temperatury strumienia ciepłego na styku obszarów, co ma istotne znaczenie dla analizy ekonomiczno-technicznej określenia optymalnej grubości izolacji termicznej.

Istniejące w przykładach pole temperatury jest polem wyznaczonym dla normowych temperatur zewnętrznych (dla wybranego obszaru Polski) i wewnętrznych i będzie występować w stosunkowo krótkim czasie w czasie trwania sezonu grzewczego. Mając wartości temperatury oraz strumienie ciepła na granicy poszczególnych podobszarów możliwe jest określenie ilości energii traconych dla danego rozwiązania architektonicznego, przy uwzględnieniu zamieszczonych na stronie Ministerstwa Finansów danych dotyczących typowych lat meteorologicznych oraz opracowanych na ich podstawie danych statystycznych dla obszaru Polski. Wartość traconej energii dla

poszczególnych rozwiązań w stosunku rozwiązania optymalnego pozwoli określić koszt eksploatacyjny danego rozwiązania.

Dla każdego z przytoczonych przykładów, wyznaczenie wartości temperatury i strumieni ciepłych na liniach brzegowych wspólnych poszczególnych podobszarów jest wykonywane automatycznie przez autorski program komputerowy.

Metoda elementów brzegowych może być równie skutecznym narzędziem co metody siatkowe. W tym przypadku program autorski może stanowić alternatywę dla bardzo drogiej aplikacji komercyjnych, wykorzystujących metody siatkowe.

Opracowanie zrealizowano w ramach z pracy statutowej nr S/WBiŚ/5/2011.

Literatura

1. Brebbia C.A., Telles J.F.C., Wrobel L.C.: *Boundary Element Techniques. Theory and Applications in Engineering*. Springer-Verlag NY 1984.
2. John T. Katsikadelis: *Boundary elements: Theory and Applications*, Elsevier Science Ltd, 2002.
3. Majchrzak E.: *Metoda elementów brzegowych w przepływie ciepła*, Wyd. Pol. Częstochowskiej 2001.
4. Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P.: *Numerical Recipes* Cambridge University Press Third ed. 2007.
5. Piotr Rynkowski, Tomasz Teleszewski, Rozwiązywanie zagadnienia ustalonego przewodzenia ciepła w obszarze wielospójnym metodą brzegowych równań całkowych, XI Warsztaty Naukowe PTSK „Symulacja w Badaniach i Rozwoju”, Warszawa 2005.

Modeling and simulation of Boundary Element Method to temperature field in cold bridge

Abstract

In the paper the model of temperature field in cold bridge is discussed using Boundary Element Method. The equations describing the steady heat conduction problem in cold bridge have been solved. Presented examples show efficiency of Boundary Element Method modeling in cold bridge in comparison with mesh method as Finite Difference Method, Finite Element Method or Finite Volume Method.