

Tomasz Janusz TELESZEWSKI,

Sławomir Adam SORKO

Politechnika Białostocka, WBiIŚ, ul. Wiejska 45E, 15-351 Białystok

E-mail: t.teleszewski@pb.edu.pl, s.sorko@pb.edu.pl

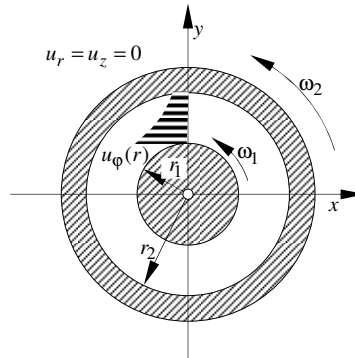
Modelowanie pola temperatury i strumienia ciepła w płaskich przepływach Taylora metodą elementów brzegowych

1 Wprowadzenie

Przepływ Taylora-Couette'a jest formą laminarnego ruchu cieczy lepkiej między dwoma koncentrycznie usytuowanymi obracającymi się cylindrami [1], [2] (rys.1). Kryterium formy ruchu cieczy w przepływach Taylora-Couette'a stanowią: liczba Reynoldsa i liczba Taylora, opisująca relacje pomiędzy siłami odśrodkowymi w ruchu cieczy i siłami wynikającymi z lepkości cieczy [2]:

$$Ta = \frac{\omega^2 h^4}{\nu^2}, \quad (1)$$

gdzie: $\omega = \Delta\omega = |\omega_1 - \omega_2|$ jest różnicą prędkości kołowej ruchu cylindrów, $h = |r_1 - r_2|$ jest odległością pomiędzy ściankami cylindrów, natomiast ν oznacza kinematyczny współczynnik lepkości cieczy $\nu = \mu/\rho$, przy czym μ jest dynamicznym współczynnikiem lepkości cieczy. Liczba Taylora określa warunki utraty stabilności przepływu [3]. Powyżej krytycznej liczby Taylora, formułowanej różnie w funkcji geometrycznych i kinematycznych właściwości ruchu w układzie koncentrycznych cylindrów, kołowy laminarny przepływ płaski przekształca się w trójwymiarowy przepływ ze zdeformowanymi przestrzennie wirami toroidalnymi [1].



Rys. 1. Przepływ Taylora-Couette'a pomiędzy dwoma koncentrycznymi cylindrami

Fig. 1. Taylor flow between two concentric cylinders

Przepływy Taylora-Couette'a ze względu na ich złożoność są przedmiotem intensywnych badań teoretycznych w sensie poznawczym, jak też przedmiotem zagadnień inżynierskich dotyczących konstrukcji mieszalników, lepkościomierzy rotacyjnych oraz konstrukcji hydrostatycznych łożysk ślizgowych [4].

Przedmiotem opracowania jest wyznaczenie parametrów przepływowych i energetycznych, w tym dyssypacji energii w płaskim laminarnym przepływie cieczy lepkiej pomiędzy rotującymi ze stałą prędkością kątową współosiowymi cylindrami.

Matematyczny opis zagadnienia sformułowano przy użyciu metody brzegowych równań całkowych. Efektem rozwiązania są: pole temperatury i izoliny strumienia ciepła dla różnych warunków geometrycznych i kinematycznych układu cylindrów i fizycznych własności cieczy.

2 Sformułowanie zagadnienia

Laminarny, płaski przepływ cieczy lepkiej w cylindrycznym układzie współrzędnych $\{r, \varphi, z\}$ przy założeniu, że prędkości $u_r = u_z = 0$ opisują: równanie ciągłości i równania Stokes'a w postaci:

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} = 0, \quad (2a)$$

$$\rho \frac{u_\varphi^2}{r} = \frac{dp}{dr}, \quad \mu \left[\frac{d^2 u_\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_\varphi}{dr} - \frac{u_\varphi}{r^2} \right] = 0. \quad (2b), (2c)$$

Rozwiązanie równania różniczkowego (2c) z warunkami brzegowymi:

$u_\varphi(r_1) = \omega_1 r_1$, $u_\varphi(r_2) = \omega_2 r_2$ ma postać:

$$u_\varphi(r) = \frac{\omega_2 r_2^2 - \omega_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} r - \frac{(\omega_1 - \omega_2) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r}. \quad (3)$$

Po wstawieniu zależności (3) do równania różniczkowego (2b) po scałkowaniu otrzymuje się zależność opisującą pole ciśnienia:

$$p(r) = \frac{\rho}{2} \left(\frac{\omega_2 r_2^2 - \omega_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \right)^2 r^2 + 2\rho \left(\frac{\omega_2 r_2^2 - \omega_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \frac{(\omega_1 - \omega_2) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \right) \ln r - \frac{\rho}{2} \left(\frac{(\omega_1 - \omega_2) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \right)^2 \frac{1}{r^2} + const \quad (4)$$

Momenty oporu ruchu cylindrów w cieczy lepkiej są odpowiednio równe:

$$M_1 = \tau_{r\varphi} \Big|_{r=r_1} + 2\pi r_1^2 = -4\pi\mu \frac{(\omega_1 - \omega_2)r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}, \quad (5a)$$

$$M_2 = \tau_{r\varphi} \Big|_{r=r_2} - 2\pi r_2^2 = +4\pi\mu \frac{(\omega_1 - \omega_2)r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}. \quad (5b)$$

W przypadku ruchu cieczy o znacznej lepkości istotna jest dyssypacja energii. Równanie energii dla odpowiednio małych liczb Reynoldsa przy przepływie Taylora przybiera postać [5]:

$$\lambda \nabla^2 T = 2\mu \nabla u_\varphi = \Phi, \quad (6)$$

gdzie Φ oznacza dyssypację energii w przepływie. Przy przyjętych wyżej warunkach geometrycznych i kinematycznych otrzymuje się:

$$\Phi = \mu \left[r \frac{d}{dr} \left(\frac{u_\varphi}{r} \right) \right]^2 = 4\mu \left(\frac{(\omega_1 - \omega_2)r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r^2} \right)^2. \quad (7)$$

3 Brzegowe równanie całkowe opisujące pole temperatury w przepływie cieczy lepkiej

Całkowe sformułowanie zagadnienia opisanego równaniem różniczkowym (6) w polu (A) , ograniczonym ciągłym brzegiem $(L = L_T \cup L_Q)$ z fizycznymi warunkami brzegowymi opisującymi na części brzegu L_T ($\mathbf{p} \in L_T$) zadaną wartość temperatury $T(\mathbf{p})|_{\mathbf{p} \in L_T} = T_s(\mathbf{p})$, a części brzegu L_Q ($\mathbf{p} \in L_Q$) zadaną wartość strumienia ciepła $q(\mathbf{p})|_{\mathbf{p} \in L_Q} = q_s(\mathbf{p})$, prowadzi do równania całkowego:

$$\begin{aligned} \chi(\mathbf{p})T(\mathbf{p}) + \int_{L_Q} T(\mathbf{q})H(\mathbf{p}, \mathbf{q})dL_{\mathbf{q}} + \int_{L_T} T_s(\mathbf{q})H(\mathbf{p}, \mathbf{q})dL_{\mathbf{q}} = \\ \frac{1}{\lambda} \int_{L_T} q(\mathbf{q})G(\mathbf{p}, \mathbf{q})dL_{\mathbf{q}} + \frac{1}{\lambda} \int_{L_Q} q_s(\mathbf{q})G(\mathbf{p}, \mathbf{q})dL_{\mathbf{q}} + \frac{1}{\lambda} \iint_A \Phi(\mathbf{w})G(\mathbf{w}, \mathbf{q})dA \end{aligned} \quad (8)$$

gdzie $\mathbf{p}(x_{\mathbf{p}}, y_{\mathbf{p}})$ i $\mathbf{q}(x_{\mathbf{q}}, y_{\mathbf{q}})$ są odpowiednio punktem ustalonym i punktem bieżącym całkowania, a funkcje $G(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ i $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ są rozwiązaniami podstawowymi: natomiast współczynnik $\chi(\mathbf{p})$ przy wydzielonej wartości $T(\mathbf{p})$ w punkcie osobliwym na gładkiej części brzegu (L) jest równy $1/2$, przy czym $\mathbf{w} \in A$:

$$G(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{r_{\mathbf{pq}}} \right), \quad r_{\mathbf{pq}} = |\mathbf{p} - \mathbf{q}| = \sqrt{(\delta x_{\mathbf{pq}})^2 + (\delta y_{\mathbf{pq}})^2}, \quad (8^1)$$

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{\partial G(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial n_{\mathbf{q}}} = \frac{1}{2\pi} \frac{\delta x_{\mathbf{pq}} n_{y\mathbf{q}} + \delta y_{\mathbf{pq}} n_{x\mathbf{q}}}{r_{\mathbf{pq}}^2}, \quad (8^2)$$

przy czym: $\delta x_{\mathbf{pq}} = (x_{\mathbf{p}} - x_{\mathbf{q}})$; $\delta y_{\mathbf{pq}} = (y_{\mathbf{p}} - y_{\mathbf{q}})$, $\mathbf{n}_{\mathbf{q}} = [n_{x\mathbf{q}}, n_{y\mathbf{q}}] = \left[\frac{\delta y_{\mathbf{q}}}{\delta L_{\mathbf{q}}}, \frac{\delta x_{\mathbf{q}}}{\delta L_{\mathbf{q}}} \right]$, jest

wektorem normalnym do granicy (L) w punkcie $\mathbf{q}(x_{\mathbf{q}}, y_{\mathbf{q}})$.

Po wyznaczeniu wartości brzegowych: temperatury $T(\mathbf{p}) \rightarrow \mathbf{p} \in L$ i strumienia ciepła $q(\mathbf{p}) \rightarrow \mathbf{p} \in L$ temperaturę w wewnętrznych punktach $\mathbf{v} \in A$ w obszarze A wyznacza się ze związku całkowego:

$$T(\mathbf{v}) = \int_L T(\mathbf{q}) H(\mathbf{v}, \mathbf{q}) dL_{\mathbf{q}} - \frac{1}{\lambda} \int_L q(\mathbf{q}) G(\mathbf{v}, \mathbf{q}) dL_{\mathbf{q}} + \frac{1}{\lambda} \iint_A \Phi(\mathbf{w}) G(\mathbf{v}, \mathbf{q}) dA_{\mathbf{w}}. \quad (9)$$

Składowe strumienia ciepła wyznacza się, różniczkując zależność (9):

$$\begin{aligned} q_x(\mathbf{v}) = -\lambda \left(\frac{\partial T(\mathbf{v})}{\partial x} \right)_{\mathbf{v}} = & -\lambda \int_L T(\mathbf{q}) \left(\frac{\partial H(\mathbf{v}, \mathbf{q})}{\partial x} \right)_{\mathbf{v}} dL_{\mathbf{q}} + \int_L q(\mathbf{q}) \left(\frac{\partial G(\mathbf{v}, \mathbf{q})}{\partial x} \right)_{\mathbf{v}} dL_{\mathbf{q}} + \\ & - \iint_A \Phi(\mathbf{w}) \left(\frac{\partial G(\mathbf{v}, \mathbf{w})}{\partial x} \right)_{\mathbf{v}} dA_{\mathbf{w}} \end{aligned} \quad (9a)$$

$$\begin{aligned} q_y(\mathbf{v}) = -\lambda \left(\frac{\partial T(\mathbf{v})}{\partial y} \right)_{\mathbf{v}} = & -\lambda \int_L T(\mathbf{q}) \left(\frac{\partial H(\mathbf{v}, \mathbf{q})}{\partial y} \right)_{\mathbf{v}} dL_{\mathbf{q}} + \int_L q(\mathbf{q}) \left(\frac{\partial G(\mathbf{v}, \mathbf{q})}{\partial y} \right)_{\mathbf{v}} dL_{\mathbf{q}} + \\ & - \iint_A \Phi(\mathbf{w}) \left(\frac{\partial G(\mathbf{v}, \mathbf{w})}{\partial y} \right)_{\mathbf{v}} dA_{\mathbf{w}} \end{aligned} \quad (9b)$$

Odpowiednie scałkowanie funkcji podcałkowych zgodnie z definicją [6] pozwala na wyznaczenie linii przepływu ciepła:

$$\frac{\partial \Xi}{\partial y} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \quad ; \quad -\frac{\partial \Xi}{\partial x} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}, \quad (11)$$

$$d\Xi = q_x dy - q_y dx \quad (10)$$

4 Numeryczne rozwiązanie zagadnienia obliczeniowego

Dyskretne rozwiązanie równania całkowego (8) polega na sprowadzeniu do układu algebraicznych równań liniowych względem dyskretnych wartości niewiadomych funkcji $T(\mathbf{q})$, $q(\mathbf{q})$ w obranych punktach (punkty kolokacji) na brzegu rozpatrywanego obszaru. Najprostszą formą rozwiązania jest podział brzegu na elementy liniowe, na których wartości poszukiwanej funkcji w punktach kolokacji tożsamy z punktami centralnymi elementów przyjmuje się za stałe. Przyjmując przybliżenie brzegu obszaru (L) J -elementowym układem elementów liniowych L_j ; $j = \overline{1, J}$, na których wartości funkcji $T(\mathbf{q}_j)$; $j = \overline{1, J}$ i $q(\mathbf{q}_j)$; $j = \overline{1, J}$ w punktach centralnych elementów mają stałe wartości, równanie całkowe (8) sprowadza się do układu algebraicznych równań liniowych:

$$\sum_{j=1}^J \delta_j^T T(\mathbf{q}_j) H(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) - \sum_{j=1}^J \delta_j^Q q(\mathbf{q}_j) G(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) = \sum_{j=1}^J \left[-\delta_j^Q T_s(\mathbf{q}_j) H(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) - \delta_j^T q_s(\mathbf{q}_j) G(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) + \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^K \Phi(\mathbf{v}_k) G(\mathbf{p}_i, \mathbf{v}_k) \Delta_k \right] \quad (11)$$

gdzie:

$$\delta_j^T = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli na elemencie } L_j \text{ poszukiwaną funkcją jest } T(\mathbf{q}_j) \\ 0 & \text{jeżeli na elemencie } L_j \text{ poszukiwaną funkcją jest } q(\mathbf{q}_j) \end{cases}, \quad (11^1)$$

$$\delta_j^Q = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli na elemencie } L_j \text{ poszukiwaną funkcją jest } q(\mathbf{q}_j) \\ 0 & \text{jeżeli na elemencie } L_j \text{ poszukiwaną funkcją jest } T(\mathbf{q}_j) \end{cases}. \quad (11^2)$$

Całkę powierzchniową w równaniu (11) po triangulacji obszaru (Λ) na K -elementów Δ_k i wyznaczeniu wartości funkcji podcałkowej $\Phi(\mathbf{v}_k)$; $k = \overline{1, K}$ w punktach centralnych elementów, przyjmując, że w obrębie poszczególnych elementów ma ona stałą wartość, sprowadza się do:

$$\iint_{\Lambda} \Phi(\mathbf{v}) G(\mathbf{p}, \mathbf{v}) d\Lambda_{\mathbf{v}} = \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \Phi(\mathbf{v}_k) G(\mathbf{p}_i, \mathbf{v}_k) \Delta_k. \quad (11^*)$$

W analogiczny sposób wyznacza się wartości temperatury $T(\mathbf{v}_k)$; $k = \overline{1, K}$ oraz strumienia ciepła $q(\mathbf{v}_k)$; $k = \overline{1, K}$ i składowych $q_x(\mathbf{v}_k)$; $k = \overline{1, K}$, $q_y(\mathbf{v}_k)$; $k = \overline{1, K}$ w punktach $\mathbf{v}_k$; $k = \overline{1, K}$ obszaru (Λ).

5 Weryfikacja algorytmu MEB

W literaturze teoretyczne rozwiązanie pola temperatury dla zagadnienia dyssypacji energii w płaskim przepływie Taylora znane jest rozpatrywanym przypadkiem przy założeniu stałej temperatury na ściankach $T_2 > T_1$ [2]:

$$T(r) = \left[Br \frac{r_2^4}{r_2^4 - r_1^4} \left(1 - \frac{r_1^2}{r^2} \right) \left(1 - \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 \left(1 - \frac{\ln\left(\frac{r}{r_1}\right)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \right) + \frac{\ln\left(\frac{r}{r_1}\right)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \right] (T_2 - T_1) + T_1 \quad (12)$$

gdzie Br jest liczbą Brinkmana, którą w rozpatrywanym przypadku definiuje się jako:

$$Br = \frac{\mu}{\lambda} \frac{r_1^2 \omega_1^2}{(T_2 - T_1)}. \quad (12a)$$

W celu weryfikacji prezentowanego algorytmu posłużono się rozwiązaniem (12) przy: $r_1 = 0.5 \text{ m}$, $\omega_1 = 2.0 \text{ s}^{-1}$, $T_1 = 0.0 \text{ }^\circ\text{C}$; $r_2 = 1.0 \text{ m}$, $\omega_2 = 0.0 \text{ s}^{-1}$, $T_2 = 0.0 \text{ }^\circ\text{C}$ oraz $\lambda = 0.1 \text{ W/(m} \cdot \text{K)}$, $\mu = 1.0 \text{ Pa} \cdot \text{s}$. Błąd rozwiązania dla temperatury wyznaczono z zależności $\delta T^{an} = \left| (T^a - T^n) / T^a \right| * 100\%$, gdzie (a) oznacza rozwiązanie analityczne, natomiast (n) rozwiązanie numeryczne metodą elementów brzegowych.

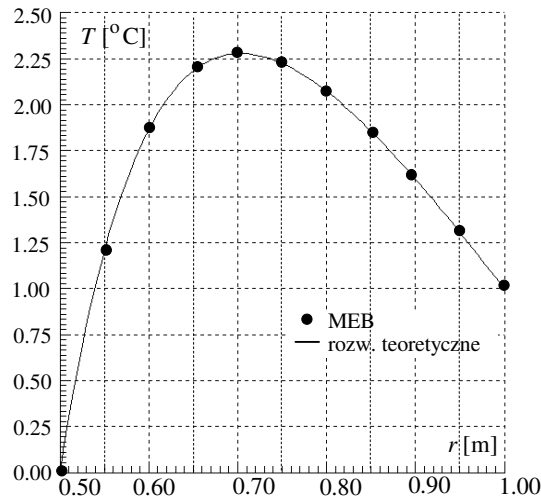
W tabeli 1 porównano rezultaty obliczeń MEB z rozwiązaniem testowym (12) dla brzegu składającego się ze 100 i 200 liniowych elementów. Błąd metody elementów brzegowych zależy przede wszystkim od stopnia dyskretyzacji linii brzegowej. W opisywanym przypadku maksymalny błąd MEB dla brzegu zbudowanego ze 100 elementów nie przekracza 1%, natomiast błąd dla brzegu składającego się z 1000 elementów nie przekracza 0.3%.

Tab. 1. Rozkład temperatury w przekroju $y=0.0$ - błąd rozwiązania MEB

Tab. 1. Temperature profile at $y=0.0$ cross section - error analysis applied in BEM

Współrzędne węzłów		Rozwiązanie teoretyczne	Rozwiązanie MEB	Błąd met. MEB	Rozwiązanie MEB	Błąd met. MEB
			100 elem.	100 elem.	200 elem.	200 elem.
x	y	T^a	T^n	$\delta T [\%]$	T^n	$\delta T [\%]$
0,5	0,0	0,0000	0,0000	-	0,0000	-
0,6	0,0	1,8643	1,8802	0,8528	1,8689	0,2517
0,7	0,0	2,2777	2,2859	0,3625	2,2807	0,1305
0,8	0,0	2,2073	2,2099	0,1219	2,2087	0,0645
0,9	0,0	1,1595	1,1609	0,1208	1,1596	0,0081
1,0	0,0	1,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000

Na rysunku 2 wykreślono graficzne porównanie rezultatów obliczeń MEB temperatury z rozwiązaniem teoretycznym (2) dla brzegu złożonego z 200 liniowych elementów.



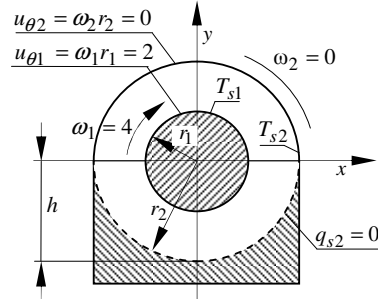
Rys. 2. Porównanie rezultatów obliczeń temperatury MEB z rozwiązaniem teoretycznym
Fig. 2. Compare results of temperature calculations by BEM with theoretical solution

6 Przykłady obliczeniowe

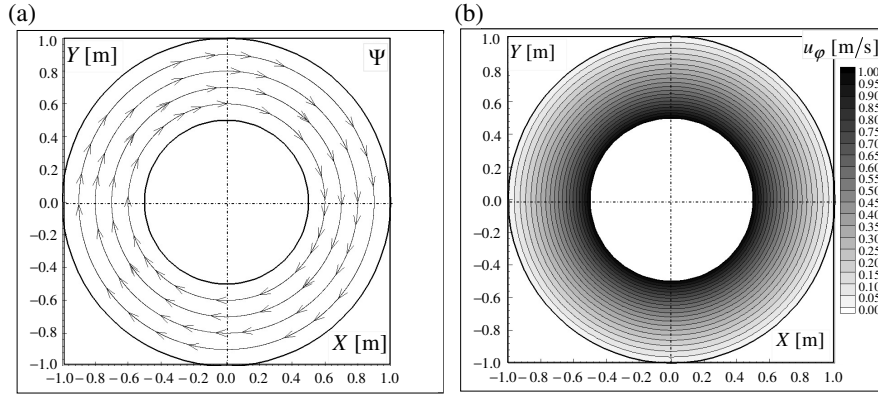
Przykładem zastosowania metody elementów brzegowych, dla którego nie jest znane rozwiązanie analityczne przepływów Taylora z uwzględnieniem dyssypacji energii, jest przepływ z częściowo adiabatyczną ścianką zewnętrzną. Stopień zagłębienia ścianki zewnętrznej określa parametr h/d , gdzie h jest wysokością izolacji ścianki zewnętrznej, natomiast $d = 2r_2$ (rys. 3). Nadto w obliczeniach przyjęto: $r_1 = 0.5 \text{ m}$, $\omega_1 = 2.0 \text{ s}^{-1}$; $r_2 = 1.0 \text{ m}$, $\omega_2 = 0.0 \text{ s}^{-1}$, $\rho = 1000.0 \text{ kg/m}^3$, $T_1 = 0.0 \text{ }^\circ\text{C}$, $T_2 = 1.0 \text{ }^\circ\text{C}$ oraz $\mu = 1.0 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ $\lambda = 0.1 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$. W rozpatrywanym przypadku liczba Reynoldsa $\text{Re} = \omega_1 r_1 D_h / \nu = 250.0$ (gdzie $D_h = [\pi(r_2^2 - r_1^2)] / [2\pi(r_2 + r_1)]$) oraz liczba Taylora $\text{Ta} = \omega_1 r_1 / (r_2 - r_1)^3 / \nu^2 = 250000.0$ i liczba Brinkmana $\text{Br} = 6.7$.

Na rysunku 4a przedstawiono linie prądu wraz z zaznaczonymi zwrotami przepływu, na rysunku 4b zaprezentowano pole prędkości przepływu (prędkość kątową), na rysunkach 4c i 4d przedstawiono linie przepływu ciepła i pole temperatury.

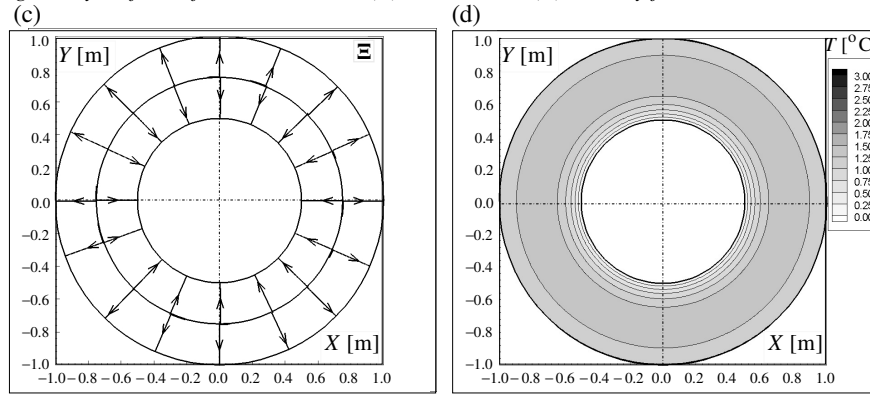
Na rysunkach (5.1a - 5.5a) wykreślono linie przepływu ciepła między dwoma wałcami, na rysunkach (5.1b - 5.5b) pola temperatury dla wybranych stopni zagłębienia ścianki adiabatycznej $\vartheta = h/d_2$: 0.25, 0.50, 0.75, 0.90, 1.00.



Rys. 3. Szkic obrazujący zagadnienia brzegowe w przykładowym przepływie
Fig. 3. Sketch to consideration of boundary conditions of the flow

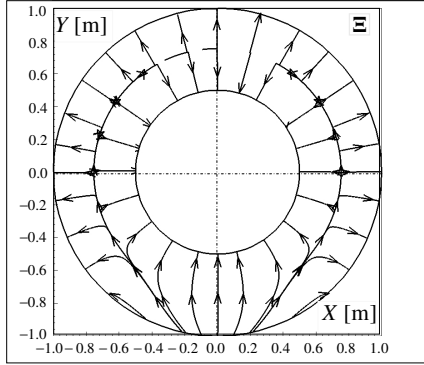


Rys. 4. Przepływ Taylora wyznaczony metodą MEB: (a) linie prądu, (b) pole prędkości
Fig.4. Taylor flow of BEM solutions: (a) streamlines, (b) velocity field

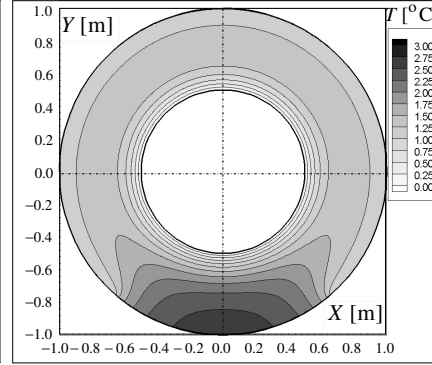


Rys. 4. Przepływ Taylora wyznaczony metodą MEB: (c) linie przepływu ciepła, (d) pole temperatury
Fig.4. Taylor flow of BEM solutions: (c) heat flow lines, (d) temperature field

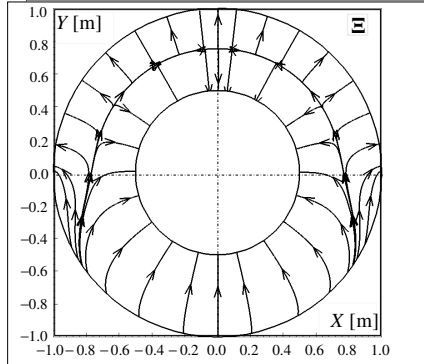
5.1 (a) $\vartheta = 0.25$



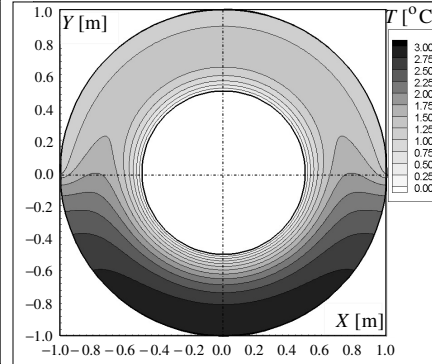
5.1 (b) $\vartheta = 0.25$



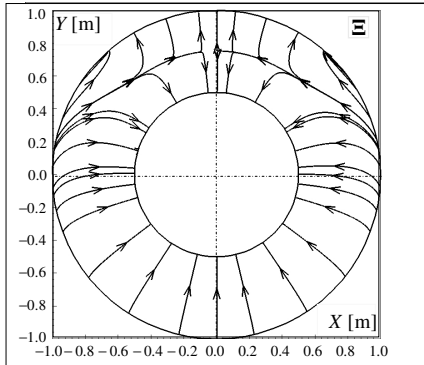
5.2 (a) $\vartheta = 0.50$



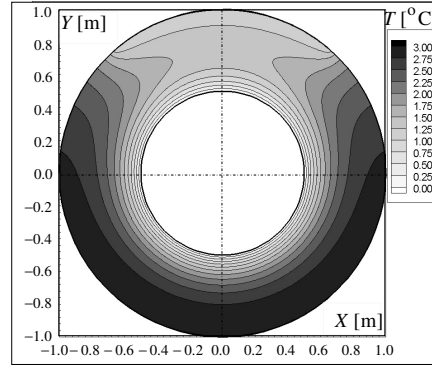
5.2 (b) $\vartheta = 0.50$

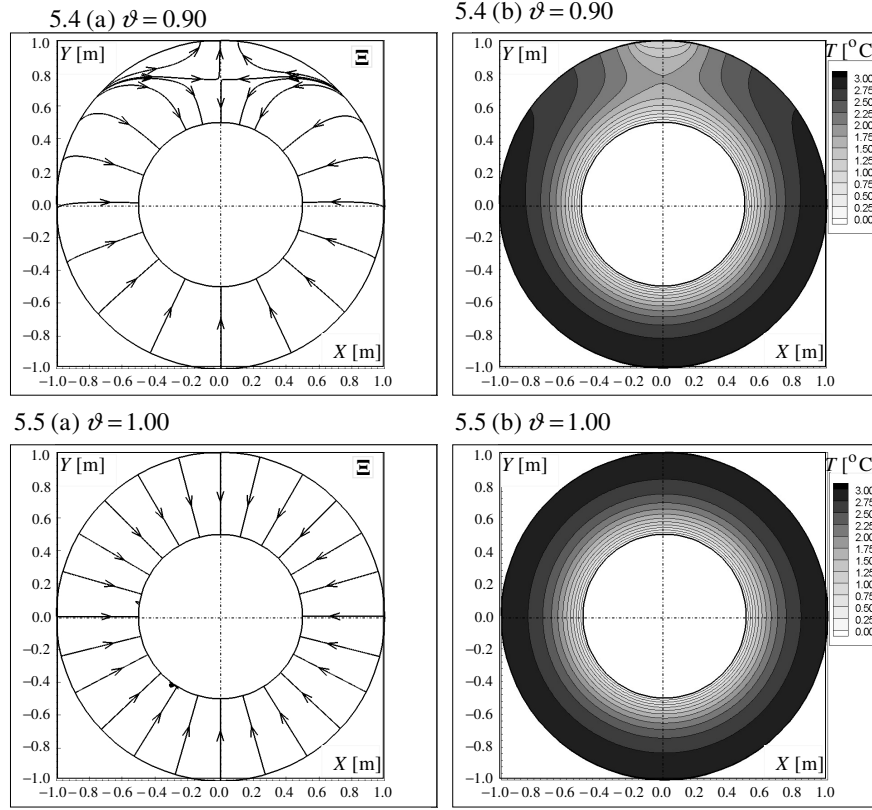


5.3 (a) $\vartheta = 0.75$



5.3 (b) $\vartheta = 0.75$





Rys. 5. Przepływ Taylora wyznaczony metodą MEB: (c) linie przepływu ciepła, (b) pole temperatury

Fig.5. Taylor flow of BEM solutions: (a) heat flow lines, (b) temperature field

7 Podsumowanie

Zaprezentowany wyżej algorytm metody elementów brzegowych jest rozszerzeniem znanego rozwiązania analitycznego pola temperatury w przepływie Taylora z uwzględnieniem dyssypacji energii. W klasycznym rozwiązaniu analitycznym wykorzystuje się jedynie warunek brzegowy Dirichleta w postaci zadanej temperatury. Istotne jest, że w prezentowanym algorytmie MEB istnieje możliwość zastosowania warunku Neumanna w postaci zadanego strumienia ciepła na brzegu, jak również i warunku mieszanego, czyli warunku Robina. Warty podkreślenia jest fakt, że mały błąd metody MEB świadczy o jej dużej użyteczności w rozwiązywaniu zagadnień różnorodnych laminarnych, nieizotermicznych przepływów płynów lepkich.

Literatura

1. Taylor G.I.: *Stability of a Viscous Liquid contained between Two Rotating Cylinders*, Phil. Trans. Royal Society, Vol. 223, 1923
2. White F.M.: *Viscous Fluid Flow*, McGraw-Hill, 2005
3. White M.F.: *Fluid Mechanics*, 7th edition, McGraw-Hill, 2009
4. Childs P. R. N.: *Rotating flow*, Elsevier Inc. 2011
5. Johnson R.W.: *The Handbook of Fluid Dynamics*
6. Holman J.P.: *Heat Transfer Tenth Edition*, McGraw-Hill, 2010

Streszczenie

Opracowanie zawiera algorytm wyznaczania pól temperatur w przepływach Taylora z uwzględnieniem dyssypacji energii metodą elementów brzegowych. W prezentowanej pracy przedstawiono przykładowe graficzne rezultaty obliczeń, dla których nie są znane rozwiązania analityczne, tj. przepływ z adiabatyczną ścianką na cylindrze zewnętrznym. Algorytm został zaimplementowany w autorskim programie obliczeniowym napisanym w języku Fortran. Program może być stosowany w przepływach cieczy lepkich np. olejów, tam, gdzie wpływ dyssypacji energii jest istotny.

Słowa kluczowe: metoda elementów brzegowych, przepływy Taylora, dyssypacja energii

Modeling of the temperature field and the heat flux in flat Taylor flows with the boundary element method

Summary

In the article it has been introduced the way to simulation viscous dissipation of Taylor flow using Boundary Element Method. Viscous dissipation is a main part, where the viscosity is large for example in oils. The algorithm was verified using a theoretical solution. The computer program was written in Fortran programming language. A numerical examples were presented flow with adiabatic wall temperature.

Keywords: boundary element method, Taylor flow, viscous dissipation

Badania zostały zrealizowane w ramach pracy statutowej nr S/WBiŚ/4/2014 Katedry Ciepłownictwa, Ogrzewnictwa i Wentylacji Politechniki Białostockiej i sfinansowane ze środków na naukę MNiSW.

